

MODELAMENTO MATEMÁTICO PARA EULER EM TUBEIRAS DE LAVAL: RECONSTRUÇÃO MUSCL E FLUXO HLLC EM MALHA NÃO ESTRUTURADA

André Felipe Marin Galeano Nobre Cruz, Heidi Korzenowski

Universidade do Vale do Paraíba/Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento, Avenida Shishima Hifumi,
2911, Urbanova - 12244-000 - São José dos Campos-SP, Brasil, andrefncruz@gmail.com,
heidi@univap.br.

Resumo

Este trabalho apresenta a formulação matemática de um solver numérico bidimensional para o escoamento compressível em tubeiras de Laval, abrangendo regimes supersônicos e hipersônicos. O método baseia-se nas equações de Euler em forma conservativa, discretizadas em malhas triangulares não estruturadas a partir do balanço de fluxos nas faces. A precisão espacial de segunda ordem é obtida por reconstrução MUSCL com gradientes avaliados por mínimos quadrados ponderados e limitador de Venkatakrishnan. Para a resolução das interfaces é empregado o fluxo numérico HLLC, assegurando robustez na captura de choques e contatos. O avanço temporal utiliza integração explícita de duas etapas (Runge–Kutta), com passo de tempo controlado pela condição CFL. A formulação constitui a base de um simulador open-source em desenvolvimento, destinado a estudos de escoamento em propulsão.

Palavras-chave: Escoamento. Tubeira. Discretização.

Área do Conhecimento: Engenharia Aeroespacial.

Introdução

O estudo de escoamentos compressíveis em tubeiras é central em aplicações de propulsão aeroespacial, pois a aceleração do fluido até regimes supersônicos ou hipersônicos envolve fenômenos como ondas de choque, regiões de expansão e adaptação à pressão ambiente. A formulação matemática adequada desses fenômenos é fundamental para o projeto de propulsores eficientes e para a análise de desempenho de motores foguete e turbojatos.

Avanços em métodos numéricos permitiram, nas últimas décadas, a solução robusta das equações de Euler em duas dimensões, inclusive em geometrias complexas. Técnicas como reconstruções de segunda ordem e fluxos numéricos aproximados têm se mostrado consistentes para regimes hiperbólicos (Toro, 2009). Em particular, solvers como o HLLC são amplamente empregados em problemas envolvendo escoamentos, com validações e aplicações em estudos de sistemas aeroespaciais, como demonstrado em simulações de motores de foguete, (e.g., NASA TM-107723).

O presente trabalho insere-se nesse contexto como parte de um projeto em desenvolvimento que já alcançou uma etapa consistente de formulação, na qual o solver conservativo 2D para escoamentos compressíveis invíscidos em tubeiras encontra-se estruturado matematicamente e implementado em protótipo computacional. O foco deste artigo recai na apresentação e discussão da base matemática adotada, equações governantes, discretização em malha não estruturada e fluxos numéricos, de modo a consolidar a teoria na qual a ferramenta se baseia.

Metodologia

Toda a base matemática apresentada é voltada para uso em uma malha não estruturada gerada a partir do software Gmesh, que é usado para a criação dessa malha. Essa nuvem de pontos gerado pelo software é usado para o cálculo em cada uma das células.

A Ciência do NANO e seu impacto transformador no MACRO

A malha e o pré-processamento geométrico são dadas pelo método Delunay. Os pontos (x, y) do contorno e interior alimentam a triangulação, cada célula armazena centróide x_i , área V_i , centros de face x_f , normais unitárias e comprimentos $|f|$, além da conectividade $j = viz(i, f)$. As normais são orientadas para fora (teste de sinal), crucial para o acúmulo consistente em (2). O gradiente LSQ (5) usa pesos $w_{ij} \propto \|x_j - x_i\|^{-2}$ para regularização geométrica [2,3].

As equações de Euler foram usadas em duas dimensões para o cálculo do escoamento [1], essa é a equação base para todo o estudo.

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1)[\rho E - 0,5\rho(u^2 + v^2)] \quad (1)$$

A discretização é por volumes finitos célula-centrados em malha triangular não-estruturada. Para a célula i , com área V_i , normais de face n_f e comprimentos $|f| = A_f$, no caso do código, nós utilizamos a equação na forma semi-discreta, sendo:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \sum_{f \in \partial i} \widehat{F}_{i,f}(U_L, U_R; n_f) A_f \quad (2)$$

onde $\widehat{F}$ é o fluxo numérico calculado com estados reconstruídos à esquerda/direita da face. A projeção do fluxo físico na normal é:

$$(F \cdot n)(U) = \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n^2 + p n_x \\ \rho u u_n^2 + p n_y \\ (\rho E + p) u_n \end{bmatrix}, \quad u_n = u n_x + v n_y \quad (3)$$

Usamos reconstrução espacial (MUSCL de 2ª ordem) para reduzir a difusão numérica típica de esquemas de 1ª ordem, em vez de assumir o campo constante em cada célula, aproximamos localmente por uma função linear. Em malhas não estruturadas e não ortogonais, o gradiente que define essa reta local é estimado de modo robusto por mínimos quadrados ponderados (LSQ), que é linearmente exato para campos afins e funciona bem mesmo com malhas irregulares. Em nosso código, usamos uma malha não-estruturada, para isso, foi usado o centróide x_i e o centro de face x_f ,

$$U_{i,f}^L = U_i + \Phi_i(\nabla U_i \cdot (x_f - x_i)), \quad U_{i,f}^R = U_j + \Phi_j(\nabla U_j \cdot (x_f - x_j)) \quad (4)$$

onde ∇U_i é obtido por mínimos quadrados ponderados (LSQ) sobre vizinhos $j \in N(i)$:

$$\min_{\nabla U_i} \sum_{j \in N(i)} w_{ij} \|U_j - U_i - \nabla U_i \cdot (x_j - x_i)\|_2^2, \quad w_{ij} \propto \frac{1}{\|x_j - x_i\|^2}, \quad (5)$$

Para suprimir oscilações de Gibbs junto a choques, usamos o limitador contínuo de Venkatakrishnan aplicado componente-a-componente ao incremento reconstruído $\Delta Q_i = \nabla Q_i \cdot (x_f - x_i)$:

$$\phi_i = \min \{ \psi(\frac{Q_i^{max} - Q_i}{\Delta Q_i}), \psi(\frac{Q_i^{min} - Q_i}{\Delta Q_i}) \}, \quad \psi(r) = \frac{r^2 + 2r + \varepsilon^2}{r^2 + r + 2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \kappa h_i^2 \quad (6)$$

com $h_i = \sqrt{V_i}$ o diâmetro característico da célula e $\kappa \in [10^{-2} - 10^{-1}]$ [4,5]. Em regiões suaves $\phi \rightarrow 1$; perto de descontinuidades $\phi \in (0,1)$ degrada localmente a 1ª ordem mantendo estabilidade (TVD em prática com RK2).

A Ciência do NANO e seu impacto transformador no MACRO

O método HLLC 2D, foi usado por sua robustez para choques e preservação da onda de contato. Para cada face, adotou-se um sistema local (n, t) . Dados estados reconstruídos L/R em primitivas (ρ, u, v, p) , projetamos u em $un = u$ e $ut = u \cdot t$, e definimos $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$. As velocidades de onda externas (Davis/Einfeldt) são:

$$S_L = \min(u_{nL} - a_L, u_{nR} - a_R) \quad S_R = \max(u_{nL} + a_L, u_{nR} + a_R) \quad (7)$$

A velocidade de contato e a pressão estrela são:

$$SM = \frac{pR - pL + \rho L u_{nL}(S_L - u_{nL}) - \rho R u_{nR}(S_R - u_{nR})}{\rho L(S_L - u_{nL}) - \rho R(S_R - u_{nR})}, \quad p^* = pL + \rho L(S_L - u_{nL})(SM - u_{nL}) = pR + \rho R(S_R - u_{nR})(SM - u_{nR}) \quad (8)$$

Os estados estrela, $k \in \{L, R\}$ satisfazem:

$$\rho_k^* = \rho_k \frac{S_k - u_{nk}}{S_k - S_M}, \quad u_{t,k^*} = u_{t,k}, \quad u_{n,k}^* = S_M. \quad (9)$$

e, em energia específica, uma forma consistente (Toro, 2009) é:

$$E_k^* = \frac{(S_k - u_{nk})E_k - p_k u_{nk} / \rho_k + p^* S_M / \rho_k}{S_k - S_M}. \quad (10)$$

O fluxo HLLC normal é então:

$$\hat{F} = \begin{cases} F_n(U_L), & S_L \geq 0 \\ F_n(U_L) + S_L(U_L^* - U_L) & S_L < 0 < S_M \\ F_n(U_L) + S_R(U_R^* - U_R) & S_M \leq 0 < S_R \\ F_n(U_R), & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

onde F_n é (3) e $U_k^* = [\rho_k^*, \rho_k^* u_{k^*}^*, \rho_k^* E_k^*]^T$ reconstruído por rotação inversa $(n, t) \rightarrow (x, y)$. Na implementação, evita-se perda de positividade impondo pisos $\rho_{\min}, p_{\min} \ll 1$.

Em relação à Integração temporal e estabilidade CFL face-based, usamos métodos RK2 de Heun e Total Variation Diminishing, úteis para resolver as equações de Euler de forma semi-discreta pelo método de volumes finitos. O RK2-TVD precisa de um Δt que respeite a condição CFL:

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n), U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} [U^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(1)})] \quad (12)$$

O passo de tempo é limitado por um CFL face-based (espectral):

$$\Delta t_i = CFL \frac{v_i}{\sum_{f \in \partial_i} (|u_n| + a)_{i,f} A_f} \quad (13)$$

onde u_n e a são avaliados na célula i e projetados na normal de cada face f . Na prática, $CFL \lesssim 0.2$ para robustez em presença de choques.

A formulação numérica empregada utiliza células fantasmas (ghost cells), que são volumes fictícios adicionados ao redor do domínio computacional. Elas permitem aplicar condições de contorno de maneira consistente com o esquema de volumes finitos, pois o cálculo de fluxos nas faces externas requer estados em ambos os lados da face. Esse método é amplamente utilizado em malhas estruturadas e não estruturadas (LeVeque, 2002).

$$u_g = u_i - 2(u_i \cdot n) n, p_g = p_i, \quad \rho_g = \rho_i, \quad (14)$$

o que garante $u_n = 0$ e fluxo de massa nulo.

Resultados

O esquema de volumes finitos apresentado, é conservativo por face e usa um fluxo numérico consistente com o fluxo físico. Com isso, quando a solução discreta converge, ela converge para uma solução fraca das equações de Euler que satisfaz os saltos de Rankine–Hugoniot, isto é, choques viajam com a velocidade correta. (LeVeque, 2002)

A reconstrução MUSCL combinada com gradientes LSQ fornece estados nas faces com erro espacial de ordem 2, sempre que o campo apresenta menos discontinuidades, reduzindo a difusão numérica típica de 1ª ordem. (LeVeque, 2002)

Em vizinhanças de discontinuidades, aplicamos limitadores TVD. Eles comprimem somente o necessário para impedir parte das oscilações de Gibbs.

O fluxo HLLC preserva a onda de contato e captura choques de forma robusta, resultando em camadas mais nítidas e menor difusão sobre contatos e cisalhamentos. (Toro, 2009)

Também, o avanço temporal é estável quando o passo de tempo respeita o critério CFL. (LeVeque, 2002).

Discussão

Os resultados da teoria, apresentados acima, implicam que o solver proposto é conservativo, de 2ª ordem em regiões suaves e não-oscilatório junto a choques, com captura nítida de contato via HLLC e estabilidade explícita sob CFL adequado. À luz de LeVeque (2002), Godunov (1959) e da teoria TVD, a degradação local de ordem perto de discontinuidades é inevitável e desejável para a ausência de oscilações. Em termos práticos, a difusão próxima a choques depende da escolha do limitador e da qualidade de malha; reduzir CFL e/ou refinar localmente aumenta a nitidez à custa de custo computacional. Como o modelo é invíscido, camadas limite não são resolvidas.

Conclusão

Neste artigo, foi proposta a formulação matemática e base teórica um solver Euler 2D FV (MUSCL+LSQ, limitador de Venkatakrishnan, HLLC com CFL) que é conservativo e consistente, além de não apresentar oscilações junto a choques, com captura nítida da onda de contato. O arcabouço mostra robustez em malhas não estruturadas e fornece base sólida para escoamentos supersônicos em tubos de Laval. O presente artigo, é base de um código em desenvolvimento que pretende testar a robustez e capacidade de tal formulação matemática.

Referências

LEVEQUE, Randall J. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

BLAZEK, Jiri. **Computational fluid dynamics: principles and applications**. 3. Ed. Oxford: Butterworth-Heinemann/Elsevier, 2015.

TORO, Eleuterio F. **Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2009.

SWEBY, Philip K. **High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws**. SIAM Journal on Numerical Analysis, v. 21, n. 5, p. 995–1011, 1984. DOI: 10.1137/0721062.

VAN LEER, Bram. **Towards the ultimate conservative difference scheme**. V. A second-order sequel to Godunov's method. Journal of Computational Physics, v. 32, n. 1, p. 101–136, 1979. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.

SHU, C.-W. **Essentially Non-Oscillatory and Weighted ENO schemes for hyperbolic conservation laws.** 1997.

BALSARA, D. S. **A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws.** arXiv, 2011.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, a minha professora e orientadora, Heidi, e a todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização desse trabalho,