

UMA DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA PARA A FÓRMULA DE BINET PARA A SEQUÊNCIA DE LUCAS

Autores: Danilo Braga Lopes, Lucas Antonio Caritá.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - São José dos Campos, Rod. Pres. Dutra, km 145 - s/n - Jardim Diamante - 12223-201 - São José dos Campos - SP, Brasil, lopes.danilo@aluno.ifsp.edu.br, prof.carita@ifsp.edu.br

Resumo

Nesse artigo iremos abordar uma nova maneira de provar uma fórmula que permite encontrar qualquer termo da sequência de Lucas, conhecida como fórmula de Binet, sem a necessidade de termos anteriores. A metodologia utilizada baseia-se na aplicação de conceitos da Álgebra Linear, como a diagonalização de matrizes e a teoria espectral, aplicados às Q -matrizes de Fibonacci e de Lucas (denotadas por Q_F e Q_L , respectivamente). A novidade deste trabalho está na utilização da identidade $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1}$, onde L_n indica o n -ésimo número de Lucas, que foi estabelecida por Quirino e Caritá (2025), para demonstrar o resultado.

Palavras-chave: Fórmula de Binet, Números de Lucas, Números de Fibonacci, Q -Matrizes.

Área do Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra: Matemática.

Introdução

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo Pisano, nasceu em Pisa, Itália, no século XIII. Filho de um rico mercador, passou parte de sua juventude no norte da África, onde se familiarizou com a cultura árabe. Em 1202, ele publicou *Liber Abaci*, sua obra mais famosa. Este livro foi responsável por introduzir os números indo-arábicos na Europa, um passo fundamental para substituir os algarismos romanos. Apesar de suas muitas contribuições, Fibonacci é mais lembrado pela sequência que leva seu nome, a **sequência de Fibonacci**, que é definida da seguinte forma: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, quando $n \geq 2$.

Assim, a sequência fica:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, F_n, F_{n+1}, F_n + F_{n+1}, \dots$$

No entanto, inicialmente a sequência de Fibonacci não foi amplamente estudada. Somente no século XIX, o matemático Jacques Philippe Marie Binet formulou uma equação que permite encontrar qualquer número da sequência sem precisar usar a recursão. Essa fórmula, que é frequentemente creditada a ele, ficou conhecida como Fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

sendo o número de ouro $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e seu conjugado $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Anos depois, François Édouard Anatole Lucas construiu a sequência de Lucas, que é definida por $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ e $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, quando $n \geq 2$, ficando:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots, L_n, L_{n+1}, L_n + L_{n+1}, \dots$$

A sequência de Lucas se torna muito importante visto que possui uma fórmula não recursiva simples. Tal fórmula é conhecida como Fórmula de Binet para os números de Lucas e é dada por:

A Ciência do NANO e seu impacto transformador no MACRO

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (1)$$

Para a consulta das demonstrações mais simples das fórmulas de Binet, recomenda-se o livro de Hoggatt Jr (1969). Aqui nos restringiremos a mencionar que elas são feitas utilizando o Princípio da Indução Finita.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração diferente para a Fórmula de Binet apresentada na Equação (1) diferente da prova tradicional, fazendo o uso das Q -matrizes de Fibonacci e de Lucas.

Metodologia

Para a nossa demonstração serão utilizadas as Q -matrizes, sendo $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a Q -matriz de Fibonacci e $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a Q -matriz de Lucas. Essas matrizes são muito interessantes para o estudo dos números de Lucas e de Fibonacci, uma vez que quando calculadas as n -ésimas potências dessas matrizes chegamos em $Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ e $Q_L^n = \begin{cases} 5^{n/2} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ par} \\ 5^{(n-1)/2} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$. O cálculo dessas potências e um estudo mais aprofundado das propriedades das Q -matrizes podem ser encontrados em Caritá e Quirino (2024).

Para a nossa demonstração alternativa da fórmula apresentada na Equação (1), também utilizaremos a identidade

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1},$$

que foi apresentada pela primeira vez por Quirino e Caritá (2025).

Desenvolvimento

Primeiramente é importante estabelecer algumas identidades que, apesar de simples, serão utilizadas posteriormente com frequência.

$$1) \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$$\text{De fato, } \alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

$$2) \quad \alpha\beta = -1$$

$$\text{De fato, } \alpha\beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1.$$

$$3) \quad L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

Demonstração por indução finita:

i. Provemos para $n = 2$:

$$F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3 = L_2$$

ii. Supomos para $n = k$:

$$L_k = F_{k+1} + F_{k-1}$$

iii. Provemos para $n = k + 1$:

$$L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = F_{k+1} + F_{k-1} + F_k + F_{k-2} = F_{k+2} + F_k$$

Portanto, a identidade é verdadeira para todo natural $n \geq 2$.

A Ciência do NANO e seu impacto transformador no MACRO

$$4) \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1}.$$

A demonstração dessa identidade feita por Quirino e Caritá (2025) usa a fórmula que pretendemos demonstrar neste trabalho. Sendo assim, para não utilizar indiretamente a fórmula para provar ela mesma (o que causaria uma inconsistência matemática), provaremos a identidade sem o uso da fórmula de Binet para a sequência de Lucas.

$$Q_L \cdot Q_F^{n-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} + F_n & F_{n+1} + F_{n-1} \\ F_{n+1} + F_{n-1} & F_n + F_{n-2} \end{bmatrix},$$

$$\text{usando a identidade 3), segue que } \begin{bmatrix} F_{n+2} + F_n & F_{n+1} + F_{n-1} \\ F_{n+1} + F_{n-1} & F_n + F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Agora com essas 4 identidades provadas podemos começar a prova.
Observando o polinômio característico da Q_F

$$PQ_F(\lambda) = \det(Q_F - I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

chegamos que os dois autovalores são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o número de ouro e seu conjugado $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Com isso, podemos achar os autovetores atrelados a esses autovalores, usando a equação $(Q_F - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Se considerarmos $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} a - a\lambda + b \\ a - b\lambda \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Dessa forma, concluímos que um autovetor atrelado à α é $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ e que um autovetor atrelado à β é $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$. Com todos esses cálculos, podemos diagonalizar Q_F , chegando em:

$$Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2)$$

Observando o polinômio característico da Q_L

$$PQ_L(\lambda) = \det(Q_L - I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0,$$

chegamos que os dois autovalores são $\sqrt{5}\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $-\sqrt{5}\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Com isso, podemos achar os autovetores atrelados a esses autovalores, usando a equação $(Q_L - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Se considerarmos $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, segue que:

$$\begin{bmatrix} 3a - a\lambda + b \\ a + 2b - b\lambda \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Dessa forma, concluímos que um autovetor atrelado à $\sqrt{5}\alpha$ é $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ e que um autovetor atrelado à $-\sqrt{5}\beta$ é $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$. Com todos esses cálculos, podemos diagonalizar Q_L , chegando em:

A Ciência do NANO e seu impacto transformador no MACRO

$$Q_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3)$$

Usando a identidade 4) em conjunto com as Equações (2) e (3), segue que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha^n & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha^n & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}\alpha^n & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & -\beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \alpha^n & -\beta^n \\ \alpha^{n-1} & -\beta^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{\alpha^n}{\beta} + \frac{\beta^n}{\alpha} & -\alpha^n - \beta^n \\ \frac{\alpha^{n-1}}{\beta} + \frac{\beta^{n-1}}{\alpha} & -\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha\beta} & -\alpha^n - \beta^n \\ \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha\beta} & -\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & -\alpha^n - \beta^n \\ -\alpha^n - \beta^n & -\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} & \alpha^n + \beta^n \\ \alpha^n + \beta^n & \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para concluir, basta comparar as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial anterior e concluímos que $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Assim, provamos a fórmula de Binet para a sequência de Lucas usando ferramentas da álgebra linear e a identidade 4).

Conclusão

A prova que apresentamos para a fórmula em questão destaca-se por sua abordagem diferenciada, empregando Q -matrizes e a identidade 4), ferramentas incomuns nesse contexto. A aplicação da teoria

espectral para a diagonalização dessas matrizes é um passo crucial. Este processo de diagonalização não apenas simplifica o problema, mas também revela a conexão com o número de ouro (α) e seu conjugado (β), cujos valores surgem de maneira orgânica a partir das propriedades inerentes da estrutura algébrica das matrizes. Este surgimento demonstra que a presença desses números não é fortuita, mas sim uma consequência direta dos princípios matemáticos subjacentes à prova.

Referências

HOGGATT JR., Verner E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Boston: Houghton Mifflin, 1969.

QUIRINO, M. E. S. C.; CARITÁ, L. A. *Insights Into the Lucas Q-Matrix and Its Properties*. **Journal of Informatics and Mathematical Sciences**, v. 17, n. 1, p. 21-41, 2025. Disponível em: <https://www.rgnpublications.com/journals/index.php/jims/article/download/3023/1778/11246>. Acesso em: 2 set. 2025. DOI: 10.26713/jims.v17i1.3023

CARITÁ, L. A.; QUIRINO, M. E. S. C. Métodos da Álgebra Matricial para o Estudo dos Números de Lucas e de Fibonacci. In: XI BIENAL DE MATEMÁTICA, 11., 2024. **Anais...** [S. l.]: [s. n.], 2024. 41 p. Disponível em: https://sbm.org.br/xi-bienal/wp-content/uploads/sites/31/2024/07/XI_BM_MINICURSO_Lucas_Carita_e_Maria_Eduarda_Quirino.pdf. Acesso em: 2 set. 2025.

Agradecimentos

O presente trabalho conta com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2025/03393-0. Modalidade: bolsa de iniciação científica.