UMA REVISÃO SOBRE A PROGRAMAÇÃO LINEAR: CONCEITOS E APLICAÇÕES

João Vitor Vasconcelos Zardini, Weverthon Lobo de Oliveira, Leandro Marochio Fernandes.

Instituto Federal do Espírito Santo, Rodovia ES-482 Fazenda Morro Grande, ES, 29311-970 - Cachoeiro de Itapemirim - ES, Brasil, jvzardini@gmail.com, weverthon.oliveira@ifes.edu.br, leandro.mfernandes@ifes.edu.br.

Resumo
Este trabalho apresenta uma revisão da programação linear (LP), uma técnica de otimização amplamente utilizada em diversas áreas da engenharia. Com foco no método simplex, o estudo explora os fundamentos teóricos da LP e demonstra sua aplicabilidade em problemas reais, como a maximização de lucros e/ou a minimização de custos. A revisão bibliográfica abrangeu as principais bases de dados acadêmicas e estudos de caso recentes, identificando a crescente importância da LP em contextos industriais modernos. Os resultados destacam a eficácia da LP em resolver problemas complexos de otimização, aumentando a produtividade em diversos setores. Conclui-se que a LP continua sendo uma ferramenta fundamental para a tomada de decisões em um ambiente cada vez mais competitivo e complexo.
Palavras-chave: Otimização. Programação linear. Método simplex. Engenharias.

Área do Conhecimento: Engenharias - Engenharia Mecânica.

Introdução

Em um mundo cada vez mais competitivo e complexo, a busca por soluções eficientes e otimizadas é fundamental para o sucesso de empresas e organizações. A otimização de processos, a alocação eficiente de recursos e a tomada de decisões estratégicas são desafios comuns em diversas áreas, desde a indústria e a logística até a finança e a saúde (Dantzig; Thapa, 2003; Aboelmagd, 2018; Farghaly; Ali; Kim, 2021). Assim, a programação linear emerge como uma ferramenta matemática eficaz para enfrentar esses desafios, pois ao modelar problemas reais através de relações lineares, a LP permite encontrar soluções ótimas de forma sistemática e eficiente.

Este artigo tem como objetivo apresentar uma revisão dos conceitos fundamentais da programação linear, com ênfase no método simplex, uma das técnicas mais utilizadas para resolver problemas de LP. Além disso, buscamos explorar as diversas aplicações da LP em diferentes áreas da engenharia, destacando sua importância na tomada de decisões estratégicas.

Metodologia

Este estudo foi realizado por meio de uma revisão detalhada da literatura, com o objetivo de explorar os conceitos de programação linear e suas aplicações na engenharia. A pesquisa incluiu artigos de bases como *Science Direct* e *ResearchGate*, usando palavras-chave relacionadas ao tema. Além disso, foram consideradas obras de referência clássicas e trabalhos recentes, como os de Dantzig e Thapa (2003) e Farghaly et al. (2021). O objetivo foi identificar os principais avanços, desafios e tendências futuras da programação linear no contexto da engenharia. Assim, a pesquisa se baseia em uma revisão sistemática da literatura, apresentando uma análise abrangente do estado da arte sem a realização de experimentos.

Resultados e Discussão

A programação linear é uma técnica matemática de otimização amplamente utilizada em diversas áreas da engenharia para resolver problemas de decisão e otimização de recursos. O seu objetivo consiste em encontrar o conjunto solução que maximiza ou minimiza uma função objetivo em um espaço □□, atrelada a uma série de restrições. Na notação de matrizes um problema genérico pode ser escrito como:

Minimize: $$c^T x = z$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$Ax = b \quad ,$$
$$x \geq 0 \quad ,$$

onde A é uma matriz retangular de dimensão $m \times n$, x representa o vetor de n variáveis, b é um vetor de dimensão m e c^T equivale ao vetor coluna dos coeficientes da função objetivo, onde T é o sobrescrito que significa transposição.

Assim, dado um problema de programação linear, podemos resolvê-lo de 3 formas, a depender do número de variáveis e de restrições. De maneira simplificada temos:

- Tipo 1 - Problemas de duas variáveis e várias restrições;
- Tipo 2 - Problemas de várias variáveis e duas restrições;
- Tipo 3 - Problemas de várias variáveis e várias restrições.

O problema tipo 1 normalmente é resolvido de maneira gráfica, já os problemas do tipo 2 podem ser resolvidos criando um polígono convexo, do qual não vamos discorrer sobre. Por fim, o terceiro tipo, usualmente é resolvido pelo pela técnica de eliminação de fourier-motzkin (FME) ou pelo algoritmo simplex. Vale ressaltar que estes dois últimos, FME e simplex, podem ser utilizados para qualquer problema de LP.

No método gráfico do tipo 1, traçamos a região imposta pelas restrições e a função custo, representada por uma reta arbitrária. Assim, à medida que variamos o valor da função objetivo (a depender do nosso foco), a reta se desloca para os extremos da região onde se localiza o conjunto solução ótimo. Isto pode ser visto na Figura 1, onde a mesma ilustra a região, em verde, imposta pelas restrições do problema abaixo e a função objetivo representada pela reta na cor preta.

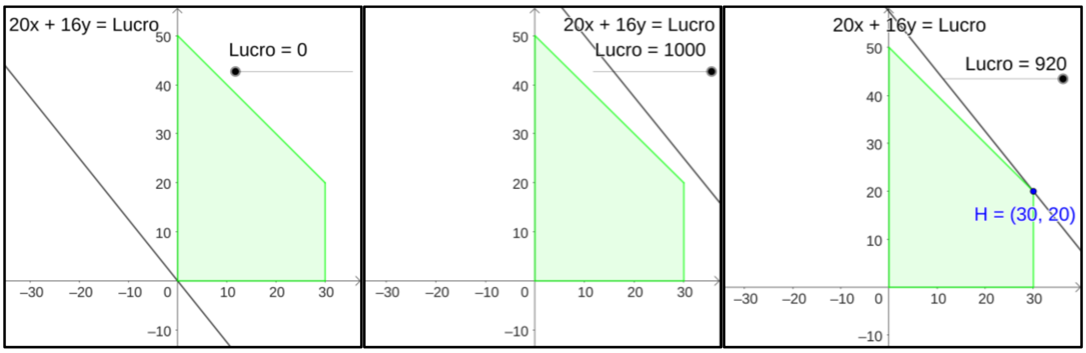
Maximize: $$20x_1 + 16x_2 = z \quad .$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 50 \qquad (2)$$
$$x_1 \leq 30 \qquad (3) \quad ,$$

com $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, onde z representa o lucro.

Figura 1 - Reta objetivo para diferentes valores de z dentro da região solução. Eixo x_1 na direção horizontal e eixo x_2 na vertical.



Fonte: Autor.

Conforme mostrado na Figura 1, percebe se que a medida que o valor de z aumenta, a reta "sobe" até atingir a fronteira da região, sendo este conjunto, formado entre as interseções de duas ou mais restrições com a função objetivo, qualquer ponto que pertence a este conjunto, será um ponto ótimo do problema, ou seja, a solução que maximiza a relação $20x_1 + 16x_2 = z$. Assim, neste exemplo o conjunto solução é formado por um único ponto H, $x_1 = 30$ e $x_2 = 20$, ponto ótimo do problema que nos retorna um lucro de 920 reais.

No método FME realizamos a eliminação de cada uma das variáveis do sistema de desigualdades lineares. Esse processo é realizado através de combinações lineares. Porém apesar de simples, esse método o FME acaba se tornando inviável para problemas de muitas restrições já que o número de desigualdades pode crescer exponencialmente. Desta forma, o método simplex se torna mais relevante, uma vez que consegue resolver a maioria dos problemas de maneira eficiente, já que ao contrário do FME, o método investiga as soluções nos extremos da região imposta pelas restrições, além de ainda verificar se existe conjunto solução (Dantzig; Thapa, 2003).

O método simplex transforma um sistema de desigualdades em um sistema de igualdades através da introdução das chamadas variáveis de folga, uma para cada restrição. O algoritmo encontra o conjunto solução ótimo (ou determina que ele não existe), por uma sequência de etapas de pivoteamento, reescrevendo o sistema inicial (já com as variáveis de folga) em função de m variáveis, sendo □ o número de restrições do problema. Estas variáveis dependentes, são chamadas de variáveis básicas e as restantes de não básicas (Dantzig; Thapa, 2003;). Com isso, o algoritmo busca uma solução básica viável, ou seja, uma solução, que não infringe nenhuma restrição, em função das variáveis básicas, zerando as não básicas. A cada etapa do algoritmo as variáveis básicas podem ou não ser ajustadas, repetindo o processo até que se atinja o ponto ótimo.

Desta forma, o algoritmo simplex funciona da seguinte forma: Ajustamos o sistema inserindo as variáveis de folga e transpomos o sistema para uma tabela chamada tableau, (Tabela 1). O passo a passo consta na Figura 2 abaixo:

Figura 2 - Método de funcionamento do algoritmo Simplex.

Fonte: Autor.

Logo, do exemplo anterior temos:

Tabela 1 - Primeiro Tableau.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	2	1	1	0	0	100
0	1	1	0	1	0	50
0	1	0	0	0	1	30
1	-20	-16	0	0	0	0

Fonte: Autor.

Observe que o menor valor se encontra na coluna 2 (-20). Realizando a divisão dos valores da coluna □ pelos respectivos coeficientes da coluna 2, o menor valor residirá na linha 3 (30 ÷ 1 = 30). Assim, escalonamos a matriz utilizando a variável □$_1$ da linha 3. Repetimos esse processo até que todos os coeficientes da função objetivo (última linha), se tornam não negativos, conforme a Tabela 3.

Tabela 3 - Terceiro e último Tableau.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	0	0	1	-1	-1	20
0	0	1	0	1	-1	20
0	1	0	0	0	1	30
1	0	0	0	16	36	920

Fonte: Autor.

Como todos os coeficientes da função objetivo se tornaram positivos, o método para e obtemos: $\square_1 = 30$ e $\square_2 = 20$ com um valor máximo de $\square = 920$.

Problemas de otimização, possuem um problema correspondente dual, cujo objetivo é a maximização (ou minimização) da função objetivo dual, que representa o valor mínimo (ou máximo) da função objetivo primal, sob as restrições da dualidade. As variáveis do problema dual, chamadas de variáveis duais, correspondem às restrições do problema primal (Huangfu; Hall, 2018).

Dantzig e Thapa (2003) apresentam um problema clássico na indústria, o de produção de ligas, onde um fabricante de ligas metálicas precisa produzir uma liga com a seguinte composição: 30% de chumbo, 30% de Zinco e 40% de estanho. Porém no mercado só vendem ligas com composições diferentes ao desejado, sendo necessário que o mesmo realize misturas com as ligas disponíveis, vide Tabela 4.

Tabela 4 - Catálogo de Ligas.

Tipos de Ligas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mistura
Chumbo (%)	20	50	30	30	30	60	40	10	10	30
Zinco (%)	30	40	20	40	30	30	50	30	10	30
Estanho (%)	50	10	50	30	40	10	10	60	80	40
Custo (R$/kg)	7,3	6,9	7,3	7,5	7,6	6,0	5,8	4,3	4,1	Minimizar

Fonte: Adaptado de Dantzig e Thapa (2003).

Desta forma, temos:

Minimize: $7{,}3\square_1 + 6{,}9\square_2 + 7{,}3\square_3 + 7{,}5\square_4 + 7{,}6\square_5 + 6{,}0\square_5 + 5{,}8\square_7 + 4{,}3\square_8 + 4{,}1\square_9 = \square$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\square_1 + \square_2 + \square_3 + \square_4 + \square_5 + \square_6 + \square_7 + \square_8 + \square_9 = 1$$
$$0{,}2\square_1 + 0{,}5\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}3\square_4 + 0{,}3\square_5 + 0{,}6\square_6 + 0{,}4\square_7 + 0{,}1\square_8 + 0{,}1\square_9 = 0{,}3$$
$$0{,}3\square_1 + 0{,}4\square_2 + 0{,}2\square_3 + 0{,}4\square_4 + 0{,}3\square_5 + 0{,}3\square_6 + 0{,}5\square_7 + 0{,}3\square_8 + 0{,}1\square_9 = 0{,}3$$
$$0{,}5\square_1 + 0{,}1\square_2 + 0{,}5\square_3 + 0{,}3\square_4 + 0{,}4\square_5 + 0{,}1\square_6 + 0{,}1\square_7 + 0{,}6\square_8 + 0{,}8\square_9 = 0{,}4$$

com $\square_1, \square_2, \dots, \square_9 \geq 0.$

Aplicando a teoria do problema dual, temos:

Maximize: $\square_1 + 0{,}3\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}4\square_4 = \square$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\square_1 + 0{,}2\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}5\square_4 \leq 7{,}3$$
$$\square_1 + 0{,}5\square_2 + 0{,}4\square_3 + 0{,}1\square_4 \leq 6{,}9$$
$$\square_1 + 0{,}3\square_2 + 0{,}2\square_3 + 0{,}5\square_4 \leq 7{,}3$$
$$\square_1 + 0{,}3\square_2 + 0{,}4\square_3 + 0{,}3\square_4 \leq 7{,}5$$
$$\square_1 + 0{,}3\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}4\square_4 \leq 7{,}6$$
$$\square_1 + 0{,}6\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}1\square_4 \leq 6{,}0$$
$$\square_1 + 0{,}4\square_2 + 0{,}5\square_3 + 0{,}1\square_4 \leq 5{,}8$$
$$\square_1 + 0{,}1\square_2 + 0{,}3\square_3 + 0{,}6\square_4 \leq 4{,}3$$
$$\square_1 + 0{,}1\square_2 + 0{,}1\square_3 + 0{,}8\square_4 \leq 4{,}1$$

com $\square_1, \square_2, \square_3 \ \square \ \square_4 \geq 0.$

Aplicando o algoritmo simplex, obtemos o seguinte resultado: $\square_6 = 0{,}4$, $\square_8 = 0{,}6$ e $\square = 4{,}98$. Assim, o menor custo do problema é de R$4,98 por kg de liga comprado através da aquisição de 40% da liga tipo 6 e 60% da liga tipo 8.

Outro problema clássico na indústria envolve os custos de fabricação e/ou transporte em suas mais diversas áreas. Farghaly, Ali e Kim (2021), por exemplo, buscaram equilibrar o lucro máximo e custos mínimos para todas as operações de mineração.

Já na engenharia de construção, a programação linear é aplicada para otimizar estratégias de licitação competitiva, visando selecionar a melhor proposta e minimizar custos e tempo de projeto, como demonstrado em um estudo de caso real que utilizou o software LINDO para modelagem (Aboelmagd, 2018).

No campo da engenharia química, a técnica é valiosa para o design eficiente de plantas químicas e para maximizar lucros através de uma programação de produção ótima (Fenech; Acrivos, 1956).

No setor de engenharia de sistemas de energia, a LP é utilizada para agendamento de geração, minimização de perdas através da alocação de fornecimento de energia reativa e planejamento de investimentos em equipamentos de geração (Delson; Shahidehpour, 1992).

Em termos de aplicação prática, a programação linear pode ser usada para identificar a melhor opção de desenvolvimento de um local que ofereça o maior retorno financeiro para um desenvolvedor (Wu, 1989).

A inclusão de métodos de programação linear no currículo de engenharia é destacada como uma abordagem científica para aprimorar a educação em engenharia, permitindo uma tomada de decisão sistemática e a formação de modelos de programação linear (Ramya; Singuluri, 2019). Além disso, muitos problemas de otimização em engenharia podem ser formulados como um programa linear, e problemas de otimização não lineares podem ser resolvidos iterativamente através de versões linearizadas do problema original (Bakr, 2013).

A programação linear também é aplicável ao design ótimo em engenharia, onde problemas com funções de custo e restrições lineares podem ser transformados em uma sequência de programas lineares, e alguns métodos de programação não linear (NLP) resolvem um problema de LP durante seus processos iterativos de solução (Arora, 2012). A programação linear é uma parte importante da pesquisa operacional, com algoritmos clássicos como o método simplex e novos algoritmos sendo desenvolvidos para aplicações específicas (Chanas; Kuchta, 1999).

Os conceitos básicos de programação linear envolvem a solução de sistemas de desigualdades lineares e a seleção de uma solução que maximize uma função linear das variáveis (Heesterman, 1983). Finalmente, a modelagem de programação linear é essencial para a tomada de decisão e alocação de recursos, com aplicações em engenharia, gestão, análise econômica e operações militares, e diferentes modelos de programação linear, como programação inteira 0-1, programação inteira mista e programação multiobjetivo, são comparados para destacar suas forças, fraquezas e características (Zhang, 2023).

Em suma, a programação linear se mostra como uma ferramenta indispensável na otimização de processos em diversas áreas da engenharia. Sua aplicação abrange desde a indústria e a construção civil até a energia e o design de produtos, auxiliando na tomada de decisões estratégicas e na busca por soluções eficientes.

Conclusão

O presente trabalho levantou a importância de se entender o método matemático por trás da programação linear explicando suas técnicas, com destaque ao algoritmo simplex. Por fim, fornecemos um passo a passo para o desenvolvimento do algoritmo simplex que servirá de auxílio a outros pesquisadores, onde os mesmos podem implementá-los em qualquer local, dado que futuras pesquisas podem explorar a integração da programação linear com outras técnicas de otimização, como a programação não linear, algoritmos genéticos e métodos heurísticos, para resolver problemas mais complexos e de grande escala.abo

Além disso, a aplicação da programação linear está presente em diversas áreas de estudos, inclusive em contextos específicos da indústria 4.0, como a otimização de processos em fábricas inteligentes e a gestão de recursos em sistemas de produção altamente automatizados.

Referências

ABOELMAGD, Y. M. R. Linear programming applications in construction sites. **Alexandria Engineering Journal**, [*s. l.*], v. 57, n. 4, p. 4177–4187, 2018.

ARORA, J. S. Linear Programming Methods for Optimum Design. *In*: INTRODUCTION TO OPTIMUM DESIGN. [*S. l.*]: Elsevier, 2012. p. 299–375. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-381375-6.00008-5.

BAKR, M. An introduction to linear programming. *In*: NONLINEAR OPTIMIZATION IN ELECTRICAL ENGINEERING WITH APPLICATIONS IN MATLAB®. [*S. l.*]: IET Digital Library, 2013. p. 29–67. Disponível em: https://digital-library.theiet.org/content/books/10.1049/pbsp008e_ch2. Acesso em: 26 abr. 2024.

CHANAS, S.; KUCHTA, D. Linear Programming with Words. *In*: STUDIES IN FUZZINESS AND SOFT COMPUTING. [*S. l.*]: Physica-Verlag HD, 1999. p. 270–288. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7908-1872-7_12.

DANTZIG, G. B.; THAPA, M. N. **Linear programming: Theory and extensions**. [*S. l.*]: Springer, 2003. v. 2

DELSON, J. K.; SHAHIDEHPOUR, S. M. Linear programming applications to power system economics, planning and operations. **IEEE Transactions on Power Systems**, [*s. l.*], v. 7, n. 3, p. 1155–1163, 1992.

FARGHALY, M. G.; ALI, M.; KIM, J.-G. Optimization of blending and production processes considering origin mines and metallurgical units using linear programming rules. **Geosystem Engineering**, [*s. l.*], v. 24, n. 3, p. 115–121, 2021.

FENECH, E. J.; ACRIVOS, A. The application of linear programming to design problems. **Chemical Engineering Science**, [*s. l.*], v. 5, n. 2, p. 93–98, 1956.

HEESTERMAN, A. R. G. Some Basic Linear Programming Concepts. *In*: MATRICES AND SIMPLEX ALGORITHMS. [*S. l.*]: Springer Netherlands, 1983. p. 144–148. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-7941-3_7.

HUANGFU, Q.; HALL, J. A. J. Parallelizing the dual revised simplex method. **Mathematical Programming Computation**, [*s. l.*], v. 10, n. 1, p. 119–142, 2018.

RAMYA, N.; SINGULURI, I. Linear programming problem applications in engineering curriculum. [*s. l.*], 2019.

WU, M. Y. Application of linear programming — a case study. **Land Development Studies**, [*s. l.*], v. 6, n. 3, p. 201–216, 1989.

ZHANG, X. Analysis of practical applications using the linear programming model. **Theoretical and Natural Science**, [*s. l.*], v. 25, n. 1, p. 246–254, 2023.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do IFES - Campus Cachoeiro de Itapemirim neste trabalho.