

ESTUDO DAS REAÇÕES DINÂMICAS DE UM MECANISMO PLANAR DE QUATRO BARRAS USANDO O MS EXCEL

Marcelo de Souza Rocha¹; orientador¹: Osvaldo Prado de Rezende²; orientador²: Carlos Sergio Pivetta³

^{1,2,3}ETEP – Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos/Escola de Engenharia, Av, Barão do Rio Branco, 882 – Jardim Esplanada CEP 12232-800, São José dos Campos – SP, ¹mrocha82@ig.com.br, ²osvaldo.rezende@etep.edu.br, ³carlos.pivetta@etep.edu.br

Resumo- A análise dinâmica de mecanismos de quatro barras é feita com menor frequência do que as análises cinemáticas, visto que exige maiores conhecimentos e domínio de alguns programas computacionais não muito difundidos. Este trabalho apresenta uma revisão breve da cinemática e dinâmica de mecanismos de quatro barras, em que é definido o procedimento para determinar as reações dinâmicas nas juntas e o torque no motor acionador de um mecanismo escolhido como referência usando as planilhas de cálculo do MS Excel. O método desenvolvido é realizado de forma repetitiva em um ciclo completo do mecanismo, ou seja, de 0 a 360° com incremento de 1 grau no ângulo de acionamento. Para isso é preciso resolver um sistema matricial $AX=B$ em que uma matriz $A[9 \times 9]$ é utilizada. Os resultados obtidos comparados com a literatura estudada apresentaram pequenas variações, permitindo observar boa confiabilidade no procedimento desenvolvido.

Palavras-chave: Análise dinâmica de mecanismos de quatro barras, análises cinemáticas, sistema matricial, reações dinâmicas.

Área do Conhecimento: III - Engenharias

Introdução

Para o dimensionamento de mecanismos que resistam a esforços, é de fundamental importância que se conheçam as forças e momentos agindo sobre cada elemento. Cada um deles deverá ser analisado na função de transmitir forças (MABIE e OCVRK, 1980) e para isso se faz necessária a análise da cinemática e da dinâmica. O principal objetivo da análise cinemática é determinar as acelerações, pois, as forças dinâmicas são proporcionais à aceleração. A análise dinâmica pode ser feita por diversos métodos, mas aquela que fornece mais informações sobre as forças internas do mecanismo requer somente o uso das Leis de Newton (NORTON, 2010).

A análise da dinâmica do mecanismo de quatro barras desenvolvida neste trabalho refere-se ao cálculo das forças e reações nas articulações e do esforço do elo motor, considerando diferentes carregamentos. Para isto é solucionado um sistema linear matricial do tipo $AX=B$, sendo a matriz $A[9 \times 9]$ regente do equilíbrio em cada posição do mecanismo.

O procedimento proposto é realizado de forma repetitiva, considerando um ciclo completo do mecanismo, ou seja, de 0 a 360 graus com incremento de 1 grau no ângulo θ_2 de acionamento do elo 2. O método permite criar uma rotina de análises da cinemática e da dinâmica do mecanismo de 4 barras, entender e avaliar os

esforços cíclicos nas juntas e o torque no elo de entrada, podendo assim calcular a potência do motor acionador. O objetivo é o de realizar todo o procedimento usando as planilhas eletrônicas de cálculo do MS Excel.

Metodologia

A Figura 1 apresenta um esquema simples de um mecanismo de quatro barras ilustrando as configurações aberta e cruzada conforme Norton (2010).

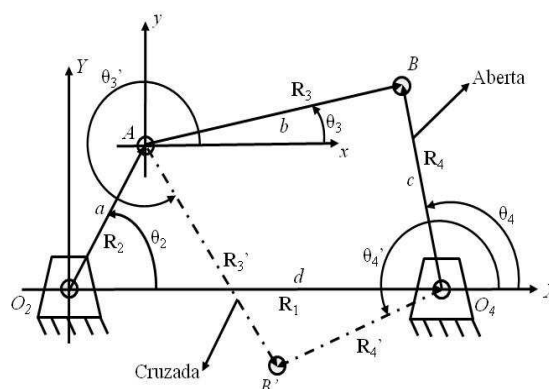


Figura 1 – Esquema de um mecanismo de quatro barras (NORTON, 2010, modif.).

As barras ou elos estão representados por R_1 , R_2 , R_3 e R_4 começando pelo elo fixo R_1 e seus comprimentos por d , a , b e c respectivamente. O

ponto O_2 é convencionalmente definido como origem do plano cartesiano XY (NORTON, 2010).

A análise da cinemática pode ser feita por vários métodos, Norton (2010) apresenta uma solução analítica com equações do segundo grau e notação em números complexos, o que possibilita a análise em várias posições e com boa precisão matemática. Mabie e Ocvirk (1980) fazem uso de construção de polígonos de vetores de velocidades e acelerações de forma gráfica, tornando o método limitado quanto ao número de posições estudadas e ainda podem ocorrer dificuldades no traçado e indefinições de escala, gerando erro nas medições dos vetores e dos ângulos. Pivetta *et al.* (2009) define um método numérico para análise de velocidades e acelerações de pontos de interesse, observando as Equações 1 e 2 de Mabie e Ocvirk (1980):

$$\mathbf{V}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{s} / \Delta t) \quad 1$$

$$\mathbf{A}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{v} / \Delta t) \quad 2$$

Pivetta *et al.* (2009) encontra as velocidades e acelerações médias do ponto P nas direções x e y diferenciando suas posições e velocidades no tempo e depois encontra os respectivos valores médios resultantes. O valor de Δt em segundos é calculado pela Equação 3:

$$\Delta t = 2\pi \Delta \theta_2 / 360^\circ \omega_2 \quad 3$$

Nesse trabalho, a análise da cinemática do mecanismo de quatro barras foi feita de acordo com a solução analítica de Norton (2010). O método tem início na Equação 4 dos vetores posição e de acordo com a Figura 1:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad 4$$

Em notação complexa e chamando o comprimento dos elos de a , b , c e d e j a unidade imaginária, a Equação 4 torna-se:

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} + ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \quad 5$$

Resolvendo as equivalências de Euler para os termos $e^{j\theta}$ o resultado define as Equações 6 e 7 que determinam θ_4 e θ_3 :

$$\theta_4 = 2\arctan\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) \quad 6$$

$$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}\right) \quad 7$$

As Equações 8 à 13 determinam os fatores:

$$A = \cos\theta_2 - K_1 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 \quad 8$$

$$B = -2\sin\theta_2 \quad 9$$

$$C = K_1 - (K_2 + 1)\cos\theta_2 + K_3 \quad 10$$

$$D = \cos\theta_2 - K_1 + K_4 \cos\theta_2 + K_5 \quad 11$$

$$E = -2\sin\theta_2 \quad 12$$

$$F = K_1 + (K_4 - 1)\cos\theta_2 + K_5 \quad 13$$

As constantes K_1 , K_2 , K_3 , K_4 e K_5 são definidas por Norton (2010) para simplificar as equações e são obtidas em função dos comprimentos dos elos. As Equações 6 e 7 têm dois resultados obtidos por meio das soluções negativa e positiva da raiz quadrada, esses resultados se referem às configurações aberta e cruzada respectivamente do mecanismo, conforme Figura 1.

Sendo conhecida a velocidade angular de entrada ω_2 do elo 2, as velocidades angulares ω_3 do elo 3 e ω_4 do elo 4 podem ser calculadas pelas Equações 14 e 15 que são a derivada primeira no tempo da equação 5.

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2 s(\theta_4 - \theta_2)}{b s(\theta_3 - \theta_4)} \quad 14$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{c \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad 15$$

Derivando mais uma vez no tempo a Equação 5, a determinação das acelerações angulares α_3 do elo 3 e α_4 do elo 4 podem ser obtidas conforme as Equações 16 e 17 cujos fatores são determinados pelas Equações 18 a 23.

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD} \quad 16$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD} \quad 17$$

$$A = c \sin\theta_4 \quad 18$$

$$B = b \sin\theta_3 \quad 19$$

$$C = a\alpha_2 \sin\theta_2 + a\omega_2^2 \cos\theta_2 + b\omega_3^2 \cos\theta_3 - c\omega_4^2 \cos\theta_4 \quad 20$$

$$D = c \cos\theta_4 \quad 21$$

$$E = b \cos\theta_3 \quad 22$$

$$F = a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 - b\omega_3^2 \sin\theta_3 + c\omega_4^2 \sin\theta_4 \quad 23$$

Nos cálculos dinâmicos são considerados os coeficientes inerciais de translação nas direções x e y de acordo com as Equações 24 e 25, e da dinâmica da rotação em torno do centro de massa para a componente z Equação 26, dos elos 2, 3 e 4.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m a_x & 24 \\ \Sigma F_y &= m a_y & 25 \\ \Sigma T &= I_{cm} \alpha & 26 \end{aligned}$$

São calculadas as forças de reação nas juntas fixas O_2 e O_4 e nas móveis A e B e ainda o torque T_{12} sobre o elo 2, conforme na Figura 2.

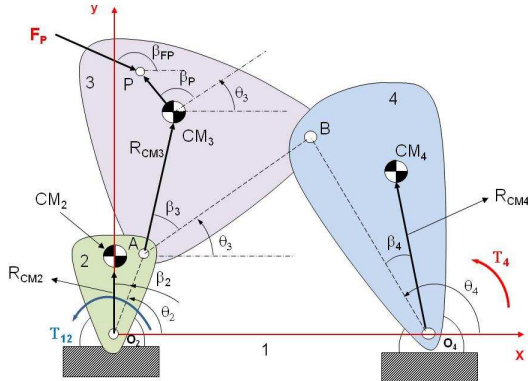


Figura 2 – Localização dos centros de massa e carregamentos (REZENDE *et al.*, 2010).

Os vetores R_{cm2} , R_{cm3} e R_{cm4} representam as distâncias do centro de massa dos respectivos elos com relação às suas juntas e são determinados pelas Equações 27, 28 e 29 em notação complexa:

$$R_{cm2} = R_{cm2} e^{j(\theta_2 + \beta_2)} \quad 27$$

$$R_{cm3} = a e^{j\theta_2} + R_{cm3} e^{j(\theta_3 + \beta_3)} \quad 28$$

$$R_{cm4} = R_{cm4} e^{j(\theta_4 - \beta_4)} \quad 29$$

As equações do movimento são derivadas a partir do sistema de referência não girante O_2XYZ , com origem na junta fixa O_2 e obtidas pela representação das forças e momentos de força atuantes em cada elo conforme DCL da Figura 3.

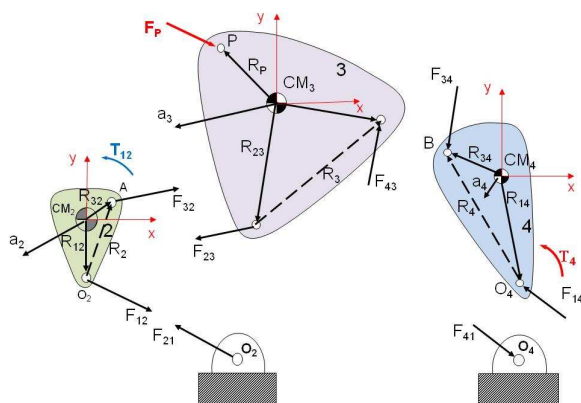


Figura 3 – Diagrama de corpo livre de cada elo (REZENDE *et al.*, 2010).

A posição do ponto de aplicação de cada uma das forças é definida em relação ao centro de massa de cada elo. A notação F_{ij} representa a ação do elo i sobre o elo j e a posição do ponto de aplicação tem a mesma notação. Assim R_{23} indica a posição do ponto de aplicação da força F_{23} .

As acelerações absolutas dos centros de massa a_2 , a_3 e a_4 , são determinadas substituindo as equivalências de Euler e derivando duas vezes no tempo as Equações 27, 28 e 29. Aplicando as Equações 24, 25 e 26 são obtidos os conjuntos de Equações 30, 31 e 32 que governam o movimento de cada elo:

Elo 2

$$\begin{aligned} F_{12x} + F_{32x} &= m_2 a_{2x} & 30 \\ F_{12y} + F_{32y} &= m_2 a_{2y} \\ T_{12} + (R_{12x} F_{12y} - R_{12y} F_{12x}) + (R_{32x} F_{32y} - R_{32y} F_{32x}) &= I_{CM2} \alpha_2 \end{aligned}$$

Elo 3

$$\begin{aligned} F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} &= m_3 a_{3x} & 31 \\ F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} &= m_3 a_{3y} \\ (R_{43x} F_{43y} - R_{43y} F_{43x}) - (R_{23x} F_{32y} - R_{23y} F_{32x}) + (R_{Px} F_{Py} - R_{Py} F_{Px}) &= I_{CM3} \alpha_3 \end{aligned}$$

Elo 4

$$\begin{aligned} F_{14x} - F_{43x} &= m_4 a_{4x} & 32 \\ F_{14y} - F_{43y} &= m_4 a_{4y} \\ (R_{14x} F_{14y} - R_{14y} F_{14x}) - (R_{34x} F_{43y} - R_{32y} F_{43x}) + T_4 &= I_{CM4} \alpha_4 \end{aligned}$$

As expressões acima são agrupadas numa equação matricial linear do tipo $AX=B$. A matriz A [9x9] é formada pelos coeficientes das incógnitas, a matriz X [9x1] representa as incógnitas e a matriz B [9x1] é formada pelas componentes x e y das forças e momentos inerciais, componentes da força de carregamento F_P , as componentes Z dos momentos inerciais e o torque resistivo T_4 .

A Figura 4 ilustra os diagramas que auxiliam na determinação das componentes R_{ij} , as Equações 33 à 44 foram deduzidas e utilizadas para determinar os valores correspondentes.

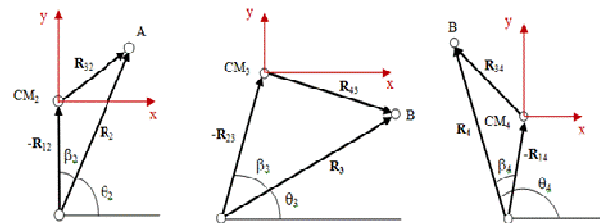


Figura 4 – Diagrama dos vetores posição dos elos 2, 3 e 4 (REZENDE *et al.*, 2010, modif.).

$$R_{12x} = -R_{CM2} \cos(\theta_2 + \beta_2) \quad 33$$

$$R_{12y} = -R_{CM2} \sin(\theta_2 + \beta_2) \quad 34$$

$$R_{32x} = R_2 \cos(\theta_2) - R_{CM2} \cos(\theta_2 + \beta_2) \quad 35$$

$$\begin{aligned}
 R_{32y} &= R_2 \sin(\theta_2) - R_{CM2} \sin(\theta_2 + \beta_2) & 36 \\
 R_{23x} &= -R_{CM3} \cos(\theta_3 + \beta_3) & 37 \\
 R_{23y} &= -R_{CM3} \sin(\theta_3 + \beta_3) & 38 \\
 R_{43x} &= R_3 \cos(\theta_3) - R_{CM3} \cos(\theta_3 + \beta_3) & 39 \\
 R_{43y} &= R_3 \sin(\theta_3) - R_{CM3} \sin(\theta_3 + \beta_3) & 40 \\
 R_{34x} &= R_4 \cos(\theta_4) - R_{CM4} \cos(\theta_4 - \beta_4) & 41 \\
 R_{34y} &= R_4 \sin(\theta_4) - R_{CM4} \sin(\theta_4 - \beta_4) & 42 \\
 R_{14x} &= -R_{CM4} \cos(\theta_4 - \beta_4) & 43 \\
 R_{14y} &= -R_{CM4} \sin(\theta_4 - \beta_4) & 44
 \end{aligned}$$

As componentes x e y do vetor posição R_p e da força F_p são determinadas pelas Equações 45, 46, 47 e 48 conforme Figura 2.

$$\begin{aligned}
 R_{Px} &= R_p \cos(\theta_3 + \beta_p) & 45 \\
 R_{Py} &= R_p \sin(\theta_3 + \beta_p) & 46 \\
 F_{Px} &= F_p \cos(\beta_{FP}) & 47 \\
 F_{Py} &= F_p \sin(\beta_{FP}) & 48
 \end{aligned}$$

Aplicação dos métodos

Para aplicação dos procedimentos, comparação e validação dos cálculos e resultados, foi utilizado o mecanismo de quatro barras de Norton (2004), ilustrado na Figura 5.

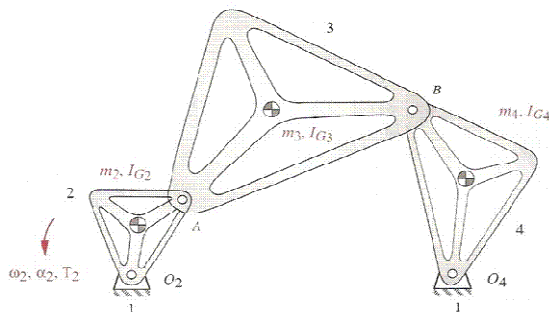


Figura 5 – Mecanismo de quatro barras (NORTON, 2004, modif.).

Norton (2004) considerou apenas os esforços causados pelas acelerações e momentos de inércia. A Tabela 1 mostra os dados geométricos, massas e coeficientes inerciais. A velocidade angular da barra 2 $\omega_2=12,566$ rad/s constante.

Tabela1- Dados geométricos, massas e coeficientes inerciais (NORTON, 2004)

Elos	1	2	3	4
R[mm]	457,3	152,42	406,44	304,79
R_{cm} [mm]	---	85,34	232,92	102,87
Massa [Kg]	---	0,525	1,050	1,050
I_{cm} [Kgm ²]	---	0,057	0,011	0,455
β [grau]	---	26,667	15,494	10,014

Em todas as análises cinemáticas, as barras foram consideradas como corpos rígidos e as articulações sem folga e sem atrito conforme Pivetta *et al.* (2009).

Comparados e validados os resultados, foram feitas as simulações com os carregamentos externos F_p força no ponto P e T_4 . A localização e o módulo da força F_p , estão apresentados na Tabela 2 conforme Rezende *et al.* (2010)..

Tabela 2- Localização e módulo da força F_p (REZENDE *et al.*, 2010)

Posição	Símbolo	Unidade	Valor
Ponto P	F_p	N	100
Ponto P	R_p	mm	174,64
Ponto P	β_p	grau	65,449
Ponto P	β_{FP}	grau	315

O torque T_4 , resistivo à velocidade angular ω_4 da barra 4, representa o atrito causado pelas forças reativas normais à junta fixa O_4 e foi calculado pela Equação 49 segundo Stolarski (1990):

$$T_4 = F_f d \quad 49$$

Onde F_f é a força de atrito, calculada pela Equação 50 e d é igual ao raio do pino da junta O_4 , que na simulação foi atribuído o valor de 0,015 m.

$$F_f = fW \quad 50$$

Sendo f o coeficiente de atrito igual a 0,1 e W é a carga normal à junta O_4 , resultante das forças F_{14x} e F_{14y} .

A potência no motor acionador foi calculada de acordo com a Equação 51 de Norton (2010).

$$P = T\omega \quad 51$$

Onde T e ω são respectivamente o torque e a velocidade angular do elo 2.

Resultados

A Tabela 3 apresenta os resultados das acelerações angulares α e absolutas dos centros de massa a_{cm} nas direções x e y dos elos 2, 3 e 4 conforme Norton (2004) quando θ_2 vale 30° , calculados com os programas computacionais *Mathcad* e *TKSolver*. A Tabela 4 mostra os resultados obtidos para o mesmo valor do ângulo θ_2 , calculados com o MS Excel.

Norton (2004) não apresenta os gráficos das reações nas juntas móveis A e B e do torque T_{12} .

Neste trabalho, esses gráficos, além o da potência no motor acionador são apresentados para complemento e melhor entendimento das análises.

Tabela 3- Resultados apresentados por Norton (2004)

Elos	1	2	3	4
α [rad/s ²]	0	0	56,7	138
a_{cmx} [m/s ²]	0	-7,4	-34,6	-13,9
a_{cmy} [m/s ²]	0	-11,3	-7,9	2,9

Tabela 4- Resultados obtidos

Elos	1	2	3	4
α [rad/s ²]	0	0	56,633	137,95
a_{cmx} [m/s ²]	0	-7,405	34,597	13,885
a_{cmy} [m/s ²]	0	-11,260	-7,885	2,933

A comparação entre os resultados da análise dinâmica de Norton (2004) e os calculados quando θ_2 vale 30°, é apresentada na Tabela 5.

Tabela 5- Comparação entre os resultados de Norton (2004) e os calculados

F_{ij}	Norton (2004) [N]	Calculados [N]
F_{12x}	-255,8	-257,21
F_{12y}	-178,1	-178,913
F_{32x}	252	253,32
F_{32y}	172,2	173
F_{34x}	-215,6	-217
F_{34y}	-163,9	-164,75
F_{14x}	201	202,4
F_{14y}	167	167,84
T_{12} [Nm]	-3,55	-3,53

As Figuras 6 e 7 ilustram as forças reativas nas direções x e y nas juntas fixas O_2 e O_4 conforme Norton (2004), e a Figura 8 mostra os resultados obtidos, ambos em uma volta completa do elo 2.

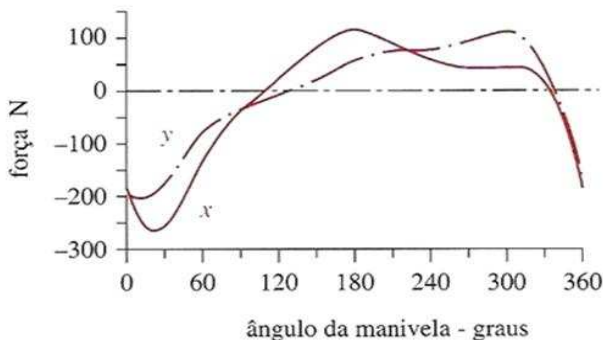


Figura 6- Forças dinâmicas em x e y na junta O_2 sem carregamentos externos (Norton, 2004).

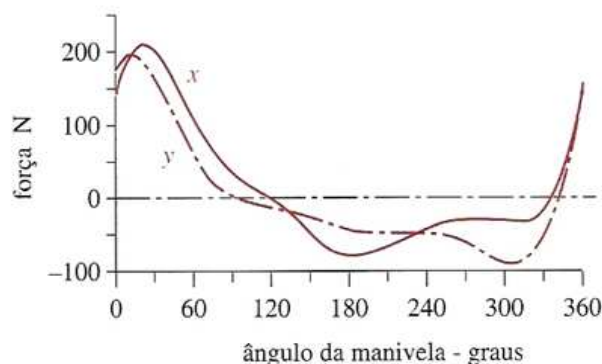


Figura 7- Forças dinâmicas em x e y na junta O_4 sem carregamentos externos (Norton, 2004).

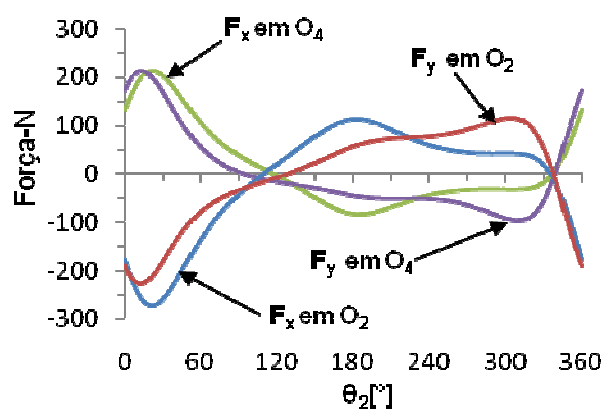


Figura 8- Forças nas direções x e y nas juntas O_2 e O_4 calculadas sem carregamentos externos.

A Figura 9 ilustra as reações absolutas nas juntas móveis A e B com e sem os carregamentos externos F_P e T_4 com θ_2 variando de 0 a 360°.

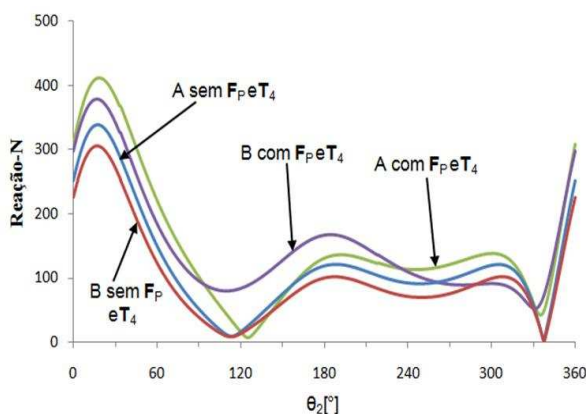


Figura 9- Reações dinâmicas absolutas nas juntas A e B com e sem os carregamentos externos.

As forças dinâmicas absolutas nas juntas O_2 e O_4 são apresentadas na Figura 10. O torque e a potência necessários ao motor acionador estão ilustrados nas Figuras 11 e 12 com e sem carregamentos externos.

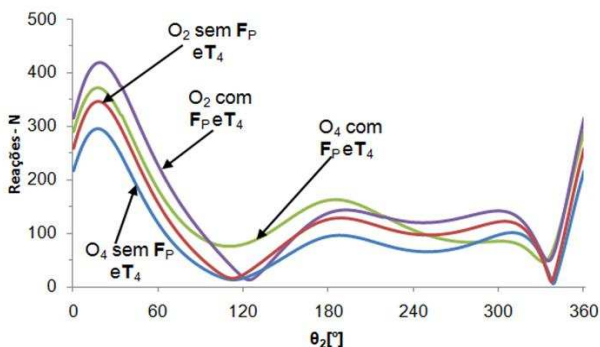


Figura 10- Forças dinâmicas absolutas em O_2 e O_4 com e sem os carregamentos F_P e T_4 .

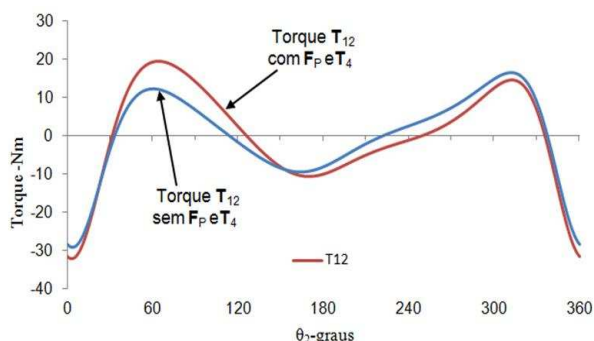


Figura 11- Torque T_{12} com e sem os carregamentos F_P e T_4 .

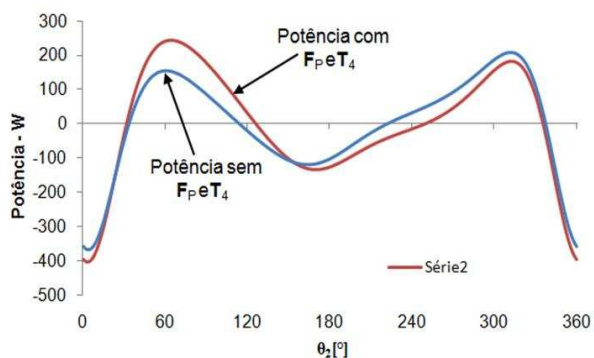


Figura 12- Potência necessária ao motor acionador com e sem os carregamentos F_P e T_4 .

Discussão

Os resultados obtidos nas Tabelas 4 e 5 e no gráfico da Figura 8, comparados aos resultados publicados por Norton (2004) nas Tabelas 3 e 5 e nos gráficos das Figuras 6 e 7, apresentam pequenas variações que podem ter ocorrido em função de arredondamentos ou pela diferença dos métodos de resolução do sistema matricial $AX=B$. Para o motor acionador do mecanismo serão necessários controles eletromecânicos de torque e potência, pois, de acordo com os gráficos das

Figuras 11 e 12 os mesmos apresentam módulos e sentidos variáveis.

Conclusão

As análises desenvolvidas nesse trabalho demonstraram que o método desenvolvido é bastante confiável e possível de ser realizado nas planilhas do MS Excel. Foi possível entender e avaliar os esforços cíclicos nas juntas e no torque do motor em um ciclo completo do mecanismo e ainda perceber a influência dos carregamentos externos. Os resultados obtidos apresentam pequenas variações em relação à literatura estudada, o que indica que teorias da cinemática e dinâmica de mecanismos foram bem aplicadas.

Agradecimentos

O autor agradece primeiramente à Deus, à sua família, aos orientadores Osvaldo Prado de Rezende e Carlos Sergio Pivetta pelo apoio e incentivo prestados e à ETEP Faculdades.

Referências

- MABIE, H. H.; OCVIRK, F. W. Mecanismos e Dinâmica das Máquinas. 2. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1980.
- NORTON, R. L. Projeto de Máquinas. Uma abordagem integrada. 2. ed. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2004. p. 114-117.
- NORTON, R. L.. Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos. Porto Alegre: AMGH Ed. LTDA, 2010.
- PIVETTA, C. S., REZENDE, O. P., GRECHI, R., CAMPOS, M. L., BRANDÃO, J. G. T. Análise Cinemática de Mecanismos de 4 barras com Abordagem Geométrica e Computacional. In: IX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica e Industrial – (CONEMI). [CD-ROM], 12p., Campo Grande, MS, Brasil, 2009.
- REZENDE, O. P., PIVETTA, C. S., GRECHI, R., CAMPOS, M. L., BRANDÃO, J. G. T. Uma Contribuição à Análise Dinâmica Computacional de Mecanismos de 4 Barras. In: X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica e Industrial – (CONEMI). [CD-ROM], 10p., Vitória, ES, Brasil, 2010.
- STOLARSKI, T. A. Tribology in Machine Design. Woburn: Butterworth-Heinemann, 1990.