

ESTUDO DETALHADO DAS EQUAÇÕES QUE DESCREVEM AS ONDAS DE GRAVIDADE E SEUS SIGNIFICADOS FÍSICOS

Alan de Andrade Monteiro¹, Marcio T. A. H. Muella¹, Fabio A. V. dos Santos²

¹UNIVAP/Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento – Laboratório de Física e Astronomia
Avenida Shishima Hifume 2911, São José dos Campos – SP

²Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA
alan.univap@gmail.com
mmuella@univap.br
fvargas@illinois.edu

Resumo- A expressão onda de gravidade sugere que a gravidade atua como uma força restauradora sobre uma parcela de ar que foi deslocada, por algum motivo, de sua posição inicial de equilíbrio. As ondas de gravidade adquirem especial atenção, pois influenciam fortemente a circulação dos constituintes e a estrutura térmica da média atmosfera. Devido a esta grande importância, o tratamento matemático empregado na descrição de tais ondas deve ser estudado minuciosamente, objetivando a compreensão física da representação matemática. Para auxiliar nesta compreensão, é proposto neste trabalho o desenvolvimento das principais equações empregadas no estudo das ondas de gravidade, visando entender o modo como os processos físicos são correlacionados e a maneira como estão representados através da abordagem matemática. Como resultado, este trabalho pode ser considerado como um rápido apêndice contendo as principais equações que descrevem ondas de gravidade e como uma referência para iniciantes nesta área de pesquisa.

Palavras-chave: Equações, Ondas de Gravidade.

Área do Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra.

Introdução

Fenômenos de ondas são predominantes nas atmosferas planetárias e surgem como resultado de perturbações introduzidas por fontes externas e internas aos planetas (SCHUNK et al., 2009). As ondas de gravidade apresentam pequenas escalas espaciais e podem ser entendidas fisicamente como o desequilíbrio entre a força de gravidade e o gradiente de pressão na atmosfera, que atuam no fluido como forças restauradoras (VARGAS, 2007).

Por estas ondas não serem globais, mas localizadas, a curvatura do planeta não é relevante para seus estudos. Ondas de gravidade apresentam fontes localizadas e se propagam com um limitado intervalo de comprimentos de ondas. No planeta Terra, as ondas de gravidade podem ser geradas na estratosfera e mesosfera e assim se propagam para as alturas termosféricas ou elas podem ser geradas na própria termosfera (SCHUNK et al., 2009).

Na baixa atmosfera as ondas de gravidade são geradas por perturbações no fluxo de ar sobre as montanhas, a partir de tempestades, vulcões e terremotos. Na alta atmosfera, podem ser geradas por variações nos aquecimentos Joule, pela força de Lorentz em elevadas altitudes, pela quebra de ondas propagantes para cima, pelo movimento do

terminadouro solar e por eclipses solares (SCHUNK et al., 2009).

Para abordar a matemática envolvida nestes processos físicos este artigo está dividido em equações básicas, apresentando os número de onda, fase, frequência e velocidade, e Frequência de Brünt-Väisälä, explicando desde seu significado físico à sua representação matemática.

Equações Básicas

Devido ao fato de que o movimento das ondas de gravidade ocorre em um meio que também se move, podem surgir confusões se não forem especificados os pontos de referência do observador. Em uma referência Lagrangiana, os movimentos do fluido são observados em um sistema de coordenadas que se movimenta juntamente com o fluxo, ocasionando observações nas quais as ondas sempre apresentam movimentos horizontais ao observador. Já a referência Euleriana é aquela na qual a referência é estacionária em relação ao fluxo. Observações em ambas as referências são relacionadas através de transformações matemáticas apropriadas e os fenômenos físicos associados são os mesmos. É interessante ressaltar que certas descrições físicas do movimento são mais conceitualmente fáceis de entender utilizando uma determinada referência do que a outra (NAPPO, 2002).

Este estudo é baseado no Sistema Euleriano, ou seja, o observador está em um ponto fixo em relação ao movimento das ondas. Será utilizado o sistema de coordenadas cartesianas com x e y nos planos horizontais e z na direção vertical, sendo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ os respectivos vetores unitários.

O comprimento de onda ℓ é a distância, ao longo do eixo em que a onda se propaga, no qual o padrão de forma da onda começa a se repetir como, por exemplo, sucessivas cristas, vales ou pontos fixos simétricos de ondas (Halliday et al., 1996). Segundo Nappo (2002) o número de onda pode ser entendido como 2π vezes o número de oscilações por unidade de comprimento ou comprimento por unidade de radianos. Matematicamente os números de ondas para a direção de propagação da onda e para as direções x , y e z , são respectivamente:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\ell} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_x} \quad l = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad m = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad (1)$$

sendo λ_x , λ_y e λ_z os comprimentos de ondas nas respectivas direções, como ilustrado na figura 1.

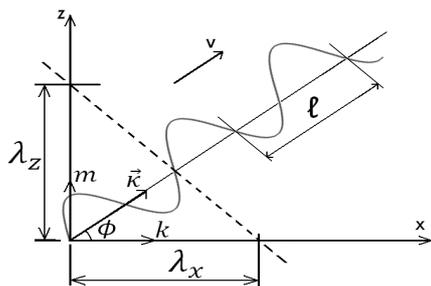


Figura 1 – Parâmetros de uma de onda de gravidade. FONTE: Adaptado de Nappo (2002, p.11) e Hargreaves (1979, p.130).

Nappo (2002) afirma que o vetor de onda define a direção de propagação da onda e é representado por:

$$\vec{\kappa} = k\hat{x} + l\hat{y} + m\hat{z} \quad (2)$$

O período de onda, τ , é o intervalo de tempo após o qual o movimento de um elemento posicionado em qualquer ponto da onda começa a se repetir. A frequência de onda, ω , é 2π vezes o número de oscilações da onda por unidade de tempo, ou seja:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (3)$$

A variação espacial e temporal da onda é descrita por:

$$f(x,t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (4)$$

sendo A a amplitude da onda, k o número de onda e ω a frequência da onda. Considere que em $t=0$ a perturbação seja descrita por $f(x,t) = A \cos(kx)$. Se o pulso se desloca $\Delta x = \omega t$ para a direita sem se deformar, então, após $t=t$, a perturbação deve ser descrita pela mesma equação que a descrevia em $t=0$ e assim $f(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$. Se após $t=t$ o pulso, sem se deformar, se desloca para a esquerda, ou seja, $-\omega$, a perturbação é descrita por $f(x,t) = A \cos(kx + \omega t)$, conforme figura 2.

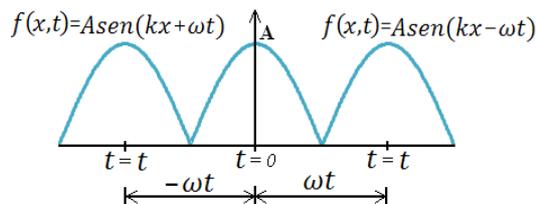


Figura 2 – Representação da variação espacial e temporal de uma onda.

O ciclo da onda pode ser expresso em coordenadas polares, sendo a fase da onda, ϕ , o ângulo positivo entre o vetor raio e o eixo horizontal. A fase da onda pode ser entendida como o ângulo de fase, ou seja, $\phi = kx - \omega t$, demonstrado na figura 3.

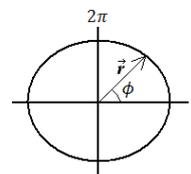


Figura 3 - Fase de uma onda representada em coordenadas polares. FONTE: Nappo (2002, p.11).

Para o caso bidimensional realiza-se o produto escalar entre o vetor $\vec{\kappa}$ e o vetor raio da circunferência \vec{r} . Todavia o vetor de onda, $\vec{\kappa}$, pode ser escrito em termos da direção x e z e de seus respectivos comprimentos de ondas, e assim:

$$\phi = \vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t \quad \Rightarrow \quad \phi = kx + mz - \omega t \quad (5)$$

Sendo a circunferência uma figura bidimensional, o vetor raio \vec{r} é descrito por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z} \quad (6)$$

A equação para a família das frentes de ondas apresenta um valor constante para a fase da onda:

$$\phi(x, z) = kx + mz = \text{constante} \quad (7)$$

Através da equação (1) verifica-se que se o comprimento de onda m , correspondente a

direção z, é anulado, então, $\lambda_z \rightarrow \infty$, e as frentes de onda se tornam paralelas ao eixo z. Da mesma forma se $\lambda_x \rightarrow \infty$, o comprimento de onda k, na direção do eixo x, é anulado e a onda se torna paralela a este eixo.

Dado que a equação (7) apresenta um valor constante, determina-se a altura de uma linha de fase constante, z_0 , como:

$$z_0 = -\frac{k}{m}x + \text{constante} \quad (8)$$

Assim a fase de um vetor é definida como:

$$\phi = kx + mz \quad (9)$$

Substituindo (8) em (9) encontra-se:

$$\phi = kx - \frac{k}{m}x + mz \Rightarrow \phi = x\left(k - \frac{k}{m}\right) + mz \quad (10)$$

Realizando-se o produto escalar entre o vetor de onda e a fase da onda verifica-se que:

$$\vec{k} \cdot \nabla \phi = (k\hat{x} + m\hat{z}) \cdot x\left(k - \frac{k}{m}\right) + mz = kx + m\left(x\left(k - \frac{k}{m}\right) + mz\right)$$

Simplificando:

$$\vec{k} \cdot \nabla \phi = kx - mx\frac{k}{m} + mz = kx - kx + mz = mz \quad (11)$$

Sendo este produto escalar nulo, conclui-se que o vetor de onda é perpendicular as frentes de onda.

A magnitude do vetor de onda é dada por:

$$|\vec{k}|^2 = k^2 + m^2 \quad (12)$$

Reescrevendo a equação (12) em termos dos números de onda, equação (1), encontra-se:

$$\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 \Rightarrow 4\pi^2 \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2$$

Com a simplificação matemática tem-se:

$$\left(\frac{1}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 \quad (13)$$

A equação (13) demonstra que ℓ deve ser muito menor que λ_x e λ_z .

É possível definir a velocidade de fase da onda imaginando-se, por exemplo, que seja marcado um ponto sobre a crista de uma onda e que se acompanhe este ponto ao longo da direção da propagação da onda, como ilustrado na figura 4.

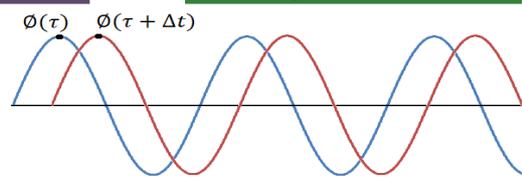


Figura 4 - Onda se movendo em determinada direção vista nos instantes τ e $\tau + \Delta\tau$. FONTE: Nappo (2002, p.13).

A velocidade de fase da onda, c , corresponde à velocidade na qual o ponto, de fase constante, se desloca na direção da propagação da onda. Observa-se que esta explicação diz respeito à velocidade da perturbação da onda inserida no fluido e não à velocidade do fluido.

A velocidade de fase é encontrada através da diferenciação da equação (5), que especifica a fase da onda, em relação ao tempo. Porém, sendo a fase constante, esta diferenciação é nula:

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d(\omega t)}{dt} \Rightarrow 0 = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega \Rightarrow \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \quad (14)$$

A partir da equação (14) é possível notar que a derivada do vetor raio em relação ao tempo, ou seja, a velocidade de fase da onda, c , equivale à relação entre a velocidade angular da onda e o vetor de onda, ou seja:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\omega}{\vec{k}} \Rightarrow c = \frac{\omega}{\vec{k}} \Rightarrow c = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (15)$$

As velocidades de fase podem ser encontradas diferenciando a equação (5) em relação ao tempo. As únicas considerações a serem feitas é que para c_x o eixo z é considerado como constante e para c_z o eixo x é considerado constante. Estas velocidades são dadas respectivamente por:

$$0 = k \frac{dx}{dt} - \omega \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow c_x = \frac{\omega}{k} \quad (16)$$

e

$$0 = m \frac{dz}{dt} - \omega \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{m} \Rightarrow c_z = \frac{\omega}{m} \quad (17)$$

A equação (13) também pode ser expressa em termos das velocidades de fase em cada direção. Para isto, é necessário multiplicá-la por $1/\omega^2$ e expressar os comprimentos de onda em termos de seus respectivos números de ondas, dados na equação (1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 \frac{1}{\omega^2} &= \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 \frac{1}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 \frac{1}{\omega^2} \\ \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{k} \cdot \omega}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{k} \cdot \omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{m} \cdot \omega}\right)^2 \\ \left(\frac{k}{2\pi\omega}\right)^2 &= \left(\frac{k}{2\pi\omega}\right)^2 + \left(\frac{m}{2\pi\omega}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{m}{\omega}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{v_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_z}\right)^2 \quad (18)$$

A equação (18) permite concluir que a velocidade de fase não é um vetor.

Para o caso de um grupo de ondas é inserido o conceito de velocidade de grupo. Esta velocidade é importante, pois todo o grupo de ondas transporta energia através do meio no qual ele se propaga. Para exemplificar este transporte de energia, considere o caso mais simples, no qual um grupo ondas seja composto por apenas duas ondas que se propagam na mesma direção. Suponha que estas ondas apresentem a mesma amplitude A , mas diferentes freqüências e números de ondas, ou seja, a primeira onda é caracterizada por $\omega + \Delta\omega$ e $k + \Delta k$ e a segunda onda por $\omega - \Delta\omega$ e $k - \Delta k$.

Utilizando a equação (4) para descrever os movimentos destas ondas tem-se para a primeira onda $f_1 = A \cos((k + \Delta k)x - [\omega + \Delta\omega]t)$, ou seja, $f_1 = A \cos(kx + \Delta kx - \omega t + \Delta\omega t)$, e para a segunda onda, $f_2 = A \cos(kx - \Delta kx - \omega t - \Delta\omega t)$ ou o mesmo que $f_2 = A \cos((k - \Delta k)x - [\omega - \Delta\omega]t)$.

Em uma análise matemática verifica-se que ambos os argumentos contêm $kx - \omega t$ e, assim, é possível atribuir a este termo uma constante arbitrária, tal como α . Outra característica é que a equação f_1 apresenta $\Delta kx + \Delta\omega t$ e f_2 contém $-\Delta kx - \Delta\omega t$. Assim, na representação de f_1 atribuí-se uma constante arbitrária, β a $\Delta kx + \Delta\omega t$ e em f_2 atribuí-se, $-\beta$ a $-\Delta kx - \Delta\omega t$. Desta maneira, é possível escrever de forma simplificada as representações de f_1 e f_2 como $f_1 = A \cos(\alpha + \beta)$ e $f_2 = A \cos(\alpha - \beta)$.

A superposição destas ondas pode ser realizada através da identidade trigonométrica $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, ou seja, $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$.

Utilizando este conceito, a superposição, ξ , equivale a:

$$\begin{aligned} \xi &= [A \cos(\alpha + \beta)] + [A \cos(\alpha - \beta)] \\ \xi &= A [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \xi &= A 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \xi &= 2 A \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta kx - \Delta\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

O significado físico da superposição destas duas ondas pode ser entendido pela análise do gráfico gerado pela equação (19), apresentado na figura 5. Neste gráfico foi considerado um intervalo de tempo de $\Delta t = 150s$, número de onda $k = 2\pi/30 m^{-1}$, $\Delta k = 2\pi/300 m^{-1}$, freqüência angular $\omega = 2\pi/5 s^{-1}$

e $\Delta\omega = 2\pi/200 s^{-1}$. Através da figura 5 verifica-se que a energia transmitida pelo grupo de ondas não atravessa os pontos de nó, pois nestes locais a amplitude é zero. Assim, a energia é aprisionada no pacote de ondas e apenas se movimenta juntamente com o grupo de ondas.

As velocidades de grupo para as direções x , u_g , e z , w_g , são encontradas pelo mesmo método do caso de uma única onda e são dadas por:

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad \text{e} \quad w_g = \frac{\partial \omega}{\partial m} \quad (20)$$



Figura 5 – Superposição de duas ondas. FONTE: Adaptado de Nappo (2002, p.16).
Freqüência de Brunt-Väisälä

Todos os fenômenos de onda apresentam comportamento oscilatório. Para ilustrar esta afirmação será utilizado o exemplo dado por Kelley (1997). Considere que um balão de festas está cheio de ar e em equilíbrio estático em uma determinada altura da atmosfera. Suponha que este balão seja empurrado para cima ou para baixo e em seguida solto novamente.

Devido à densidade atmosférica diminuir com o aumento da altura, quando o balão é deslocado de sua posição de equilíbrio, o ar em seu interior apresenta densidade diferente do ar de sua redondeza e desta forma o balão tenderá a retornar a sua posição de equilíbrio. Supondo que o balão foi deslocado para cima, quando tende a retornar para baixo, ele ultrapassa sua posição de equilíbrio e é eventualmente forçado para cima novamente. Este ciclo ocorre até que o balão consiga estabelecer seu equilíbrio com a atmosfera. Esta ilustração demonstra que ocorre uma oscilação antes que o equilíbrio seja atingido. A freqüência de Brunt-Väisälä é a freqüência na qual ocorre esta oscilação. No caso em que há transferência de calor, uma parcela de ar aquecida irá se expandir e diminuir sua densidade, provocando um deslocamento para cima. Quando esfriada, a parcela irá comprimir e aumentar sua densidade, ocasionando um movimento para baixo. A oscilação ocorrerá quando a parcela buscar sua posição de equilíbrio.

Para a análise matemática, considere uma atmosfera com uma massa de ar m_a e uma parcela de ar com massa m_p em equilíbrio com a atmosfera em uma determinada altura z_e . Se a

massa de ar m_p for deslocada Δz a partir da posição de equilíbrio e não ocorrer transferência de calor, a força de fluabilidade que atuará na parcela será dada por:

$$\vec{F} = -g \cdot (m_p - m_a) \vec{z} \quad (21)$$

endo g a aceleração da gravidade. O sinal negativo é decorrente de que o sentido positivo para a gravidade é para cima. Aplicando a segunda Lei de Newton para o movimento ($\vec{F} = m\vec{a}$) na equação (21) e expressando a aceleração na forma diferencial encontra-se:

$$m_p \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \cdot (m_p - m_a) = -g \cdot \left(\frac{m_p - m_a}{m_p} \right) \quad (22)$$

Outra consideração é que o volume da massa de ar m_p é igual ao volume da massa de ar m_a da atmosfera ou seja, $V_a = V_p = V$ e que a pressão em m_a e em m_p é a mesma e igual a pressão atmosférica p . Através da equação da densidade, $\rho = \frac{m}{V}$ a massa pode ser dada por $m = \rho \cdot V$ e as massas de ar m_a e m_p podem ser expressas, respectivamente, como $m_a = \rho_a \cdot V$ e $m_p = \rho_p \cdot V$. Substituindo estas massas na equação (22):

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \left(\frac{\rho_p \cdot V - \rho_a \cdot V}{\rho_p \cdot V} \right) = -g \left(\frac{\rho_p - \rho_a}{\rho_p} \right) \quad (23)$$

A equação de estado para o ar seco é representada pela equação dos gases ideais, $p = \rho RT$, onde R , a constante universal para os gases, é $R = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, e T é a temperatura. Desta forma, as densidades para a atmosfera e para a parcela de ar podem ser escritas como:

$$\rho_a = \frac{p}{RT_a} \quad \text{e} \quad \rho_p = \frac{p}{RT_p} \quad (24)$$

Substituindo as densidades da equação (24) na equação (23), defini-se a aceleração em termos da temperatura:

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \cdot \left(\frac{\frac{p}{RT_p} - \frac{p}{RT_a}}{\frac{p}{RT_p}} \right) \Rightarrow \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \cdot \left(\frac{1 - \frac{T_p}{T_a}}{1} \right)$$

Transformando a divisão entre as frações em uma multiplicação:

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_a} \right) \cdot T_p = -g \left(\frac{T_p}{T_p} - \frac{T_p}{T_a} \right) = -g \left(1 - \frac{T_p}{T_a} \right)$$

Simplificando,

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \cdot \left(\frac{T_a - T_p}{T_a} \right) = -\frac{g}{T_a} (T_a - T_p) \quad (25)$$

Expandindo até a primeira ordem a temperatura de ar da atmosfera, T_a , e a temperatura da parcela de ar, T_p , encontra-se:

$$T_a(z_e + \Delta z) = T_0 + \Delta z \cdot \frac{\partial T_a}{\partial z} \quad (26)$$

e

$$T_p(z_e + \Delta z) = T_0 + \Delta z \cdot \frac{\partial T_p}{\partial z}$$

Onde T_0 corresponde a temperatura na altura

de equilíbrio z_e . O termo $\frac{\Delta z \partial T}{\partial z}$ mostra a variação sofrida pela temperatura em função da respectiva variação da altura. Substituindo as equações (26) na equação (25) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} &= -\frac{g}{T_a} (T_a - T_p) \\ \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} &= -\frac{g}{T_a} \left(T_0 + \Delta z \cdot \frac{\partial T_a}{\partial z} - T_0 - \Delta z \cdot \frac{\partial T_p}{\partial z} \right) \\ \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} &= -\frac{g}{T_a} \Delta z \left(\frac{\partial T_a}{\partial z} - \frac{\partial T_p}{\partial z} \right) \quad (27) \end{aligned}$$

O objetivo é expressar (27) em termos da taxa de lapso adiabático Γ . Para este propósito faz-se necessário relembrar a 1ª Lei da Termodinâmica que afirma que a variação da quantidade de calor q sofrida por um corpo o faz realizar trabalho W e/ou armazenar energia interna u .

$$dq = dW + du \quad (28)$$

O trabalho é o produto da força F ($F = p \cdot A$, sendo A a área e p a pressão) pelo deslocamento dx realizado pelo corpo. O produto entre a área e o deslocamento corresponde ao volume dv , logo:

$$dW = p \cdot A \cdot dx \Rightarrow dW = p \cdot dv \quad (29)$$

É possível considerar o volume V como unitário

e substituí-lo pelo volume específico $\alpha = \frac{1}{\rho}$:

$$dW = p \cdot d\alpha \quad (30)$$

Reescrevendo a equação (28), tem-se:

$$dq = p \cdot d\alpha + du \quad (31)$$

Em processos nos quais é fornecido calor a um material, variando sua temperatura, mas permanecendo constante seu volume, introduz-se o conceito de calor específico com volume constante c_v , dado por:

$$c_v = \frac{dq}{dT} \quad (32)$$

Como o volume não variou, logo não foi realizado trabalho, ou seja, $dW = 0$ e da equação (28) conclui-se que $dq = du$. Deste pressuposto reescreve-se a equação (32):

$$c_v = \frac{du}{dT} \Rightarrow du = c_v \cdot dT \quad (33)$$

Substituindo (33) em (31) encontra-se:

$$dq = p d\alpha + c_p dT \quad (34)$$

Todavia, $p d\alpha$, provém de:

$$d(p\alpha) = p d\alpha + \alpha dp \Rightarrow p d\alpha = d(p\alpha) - \alpha dp \quad (35)$$

Substituindo (35) em (34):

$$dq = d(p\alpha) - \alpha dp + c_p dT \quad (36)$$

Da lei dos gases ideais $p = \rho RT$ tem-se que $\frac{p}{\rho} = RT$, mas expressando a densidade em termos do volume específico, α , encontra-se $p\alpha = RT$. Substituindo este termo em (36) tem-se $dq = d(RT) - \alpha dp + c_p dT$, mas sendo R uma constante, verifica-se:

$$dq = R dT - \alpha dp + c_p dT = (R + c_p) dT - \alpha dp \quad (37)$$

Quando é fornecido calor a um material, variando sua temperatura, mas permanecendo constante sua pressão, é introduzido o conceito de calor específico com pressão constante c_p :

$$c_p = \frac{dq}{dT} \Rightarrow dq = c_p dT \quad (38)$$

A equação (37), quando considerada no processo de pressão contante, $dp=0$, fornece:

$$dq = (R + c_p) dT \quad (39)$$

Por descreverem a variação de energia dq , as equações (38) e (39) podem ser igualadas:

$$c_p dT = (R + c_p) dT \Rightarrow c_p = R + c_p \quad (40)$$

Substituindo (40) em (37), encontra-se uma nova expressão para a 1ª Lei da Termodinâmica:

$$dq = c_p dT - \alpha dp \quad (41)$$

Considerando esta equação para a 1ª Lei da Termodinâmica e tendo em vista ser o processo adiabático, $dq=0$, tem-se:

$$0 = c_p dT - \alpha dp \Rightarrow c_p dT = \alpha dp \quad (42)$$

A equação hidrostática, definida por $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, determina que $\partial p = -\rho g \partial z$. Substituindo esta variação de pressão na equação (42) e

relembrando que $\alpha = \frac{1}{\rho}$, encontra-se:

$$c_p dT = -\alpha \rho g \partial z = -\frac{1}{\rho} \rho g \partial z = -g \partial z \quad (43)$$

Manipulando a equação (43) é possível encontrar a taxa de lapso adiabático:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} = \Gamma \quad (44)$$

Para ar seco tem-se $c_p=1005 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ e, conseqüentemente, $\Gamma = -10 \text{ K km}^{-1}$. Após esta introdução, retorna-se à equação (27) e são realizadas as seguintes considerações:

$$-\frac{\partial T_p}{\partial z} = -\frac{g}{c_p} = \Gamma \quad \text{e} \quad \frac{\partial T_a}{\partial z} = \gamma_a \quad (45)$$

sendo γ_a o gradiente atmosférico de temperatura. Com estas substituições a equação (27) pode ser expressa em termos da taxa de lapso adiabático Γ .

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -\frac{g}{T_a} \Delta z (\Gamma - \gamma_a) \quad (46)$$

Então, reescreve-se a equação (46) como:

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -N^2 \Delta z \quad (47)$$

sendo N^2 a freqüência de Brunt-Väisälä:

$$N^2 = \frac{g}{T_a} (\Gamma - \gamma_a) \quad (48)$$

Com a equação (48) conclui-se que a freqüência de Brunt-Väisälä é completamente dependente da temperatura. Este fato impõem limites para a propagação vertical das ondas de gravidade, pois quando uma onda alcança regiões nas quais sua freqüência intrínseca ω se torna maior do que N , ela não consegue mais se propagar verticalmente. Assim, N^2 corresponde ao limite superior em freqüência para a propagação das ondas de gravidade. A região em que ocorre $\omega = N$ é chamada de nível de reflexão.

Outra característica física é que se $N^2 > 0$ as partículas se movimentam em torno de suas posições de equilíbrio e as oscilações são chamadas estáveis. Se $N^2 < 0$ os deslocamentos de suas oscilações aumentam indefinidamente e os movimentos são chamados de instáveis.

Resultados

Este artigo pode ser considerado como um rápido apêndice constituído pelas principais equações que descrevem o comportamento característico das ondas de gravidade. O objetivo principal foi desenvolver os raciocínios realizados para se obter tais equações. Neste intuito, está centralizado o diferencial deste trabalho, pois geralmente as literaturas direcionadas a este tema apenas expõem tais equações em seu estado final e não demonstram seus desenvolvimentos.

Discussão

Este estudo foi de grande importância, pois demonstrou a base matemática de uma das frentes de trabalho para a confecção da dissertação de mestrado intitulada como Estudo

do Acoplamento Mesosfera-Ionosfera por Meio de Ondas de Gravidade Utilizando Modelagem Numérica, que está sendo realizado no Instituto de Pesquisa e desenvolvimento da UNIVAP.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de Física 2 – Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 4 ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1996.

HARGREAVES, J.K. The Upper Atmosphere and Solar-Terrestrial Relations – An Introduction to the Aerospace Environment. 1 ed. New York: Ed Van Nostrand Reinhold Company, 1979.

KELLEY, M.C. Aspects of Weather and Space Weather in the Earths Atmosphere: the Role of Internal Atmospheric Gravity Waves. 1ed Washington D.C.: Ed National Academy of Sciences, 1997.

NAPPO, C.J. An Introduction to Atmospheric Gravity Waves. 1 ed. San Diego: Ed. Academic Press, 2002.

SALBY, M.L. Fundamentals of Atmospheric Physics. 1ed. San Diego: Ed. Academic Press, 1996.

SCHUNK, R.; NAGY, A. Ionospheres Physics, Plasma Physics and Chemistry. 2ed. São Paulo: Ed. Cambridge University Press, 2009.

VARGAS, F.A. Investigação do Fluxo de Momento das Ondas de Gravidade na Alta Atmosfera Através da Aeroluminescência. Tese (Doutorado em Geofísica Espacial) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2007.