A DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES NA CIÊNCIA
XX INIC / *XVI* EPG / VI INID - UNIVAP 2016

Geisibel Ramos de Almeida[1], Edilaine Barbosa do Amaral[2], Maria Teodora Ferreira[3]

[1]Faculdade Bilac, R. Francisco Paes, nº 84, São José dos Campos, SP, geisibel.03@gmail.com
[2]Faculdade Bilac, R. Francisco Paes, nº 84, São José dos Campos, SP, iredilainepmmi@gmail.com
[3]Faculdade Bilac, R. Francisco Paes, nº 84, São José dos Campos, SP, maria.ferreira@bilac.com.br
[3]Univap, Praça Cândido Dias Castejón, nº 116, São José dos Campos, SP, mariateodora@univap.br

Resumo – Em diversas áreas da ciência é possível encontrar aplicações da derivada sendo que o seu estudo auxilia na interpretação e resolução de situações-problemas. A derivada é considerada a taxa de variação instantânea de uma grandeza em relação a outra e, graficamente, a derivada em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico naquele ponto. Neste trabalho apresenta-se aplicações da derivada no cotidiano, como por exemplo na previsão do tempo, no custo e na produção de produtos, na área epidemiológica e na engenharia de produção.

Palavras-chave: Aplicações da derivada, Previsão do Tempo, Custo de produtos , Moléstia Epidêmica, Engenharia de Produção.
Área do Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra**.**

Introdução

O cálculo da derivada surgiu com Newton e Leibniz. Newton desenvolveu a sua teoria voltada para as taxas de variação e Leibniz concentrou-se no cálculo da derivada como sendo uma diferencial. Assim, Leibniz criou fórmulas para denotar a derivada e as diferenciais e depois algumas regras de derivação, conforme discutido em Santana (2010) e Stewart (2013).

O conceito e as regras de derivação podem ser utilizados para resolver problemas do cotidiano que aparecem em diferentes áreas, por exemplo, em Economia, Física e nas Ciências Biológicas, conforme apresentado em Pires (2001), Soares (2016), Sossae (2016), Rocha (2016) e Vaz (2016).

Devido à aplicação da derivada no contexto da cidadania global, neste trabalho apresenta-se a definição, algumas regras de derivação usadas para resolvê-la e sua utilização em diversos problemas.

Metodologia

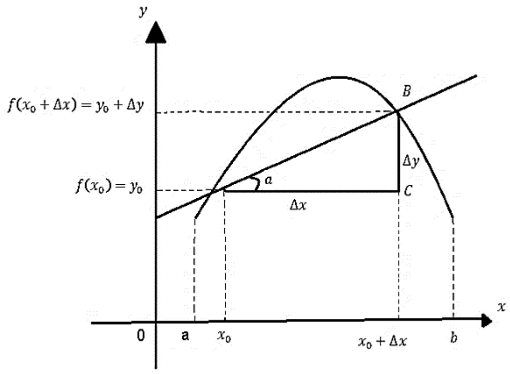
A derivada de uma função f em um valor x_0 é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Pode ser observada na Figura 1 uma curva contínua, representando o gráfico de uma função $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que as coordenadas do ponto A são x_0 e $f(x_0)$ e outro ponto B do gráfico de f, sendo $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Então Δx será o deslocamento ocorrido pelos pontos A e B no eixo das abcissas, assim a reta que passará pelos pontos será considerada a secante da curva $y = f(x)$.

O coeficiente que foi considerado por Newton é a inclinação da reta, que também é conhecido por ser o coeficiente angular que é definido como a razão incremental da função f.

Note na Figura 1 que a função $y = f(x)$ possui dois valores x_0 e $x_0 + \Delta x$ no intervalo (a,b), sendo Δx a variação dos valores de x. Então o valor da função passa por $f(x_0)$ até $f(x_0 + \Delta x)$, onde ocorre a variação $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Figura 1- Definição de derivada nos pontos a e b.



Fonte: Adaptado de Santana (2010).

A tangente de α é considerada a taxa média de variação da função f, em relação ao quociente entre Δy e Δx, dada por:

$$tg(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Note que a função é definida no intervalo (a,b) e o ponto x_0 é um ponto pertencente ao intervalo. O limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para $\Delta x \to 0$, é considerado como a derivada da função f no ponto x_0, se o limite $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x)}{\Delta x}$ existir.

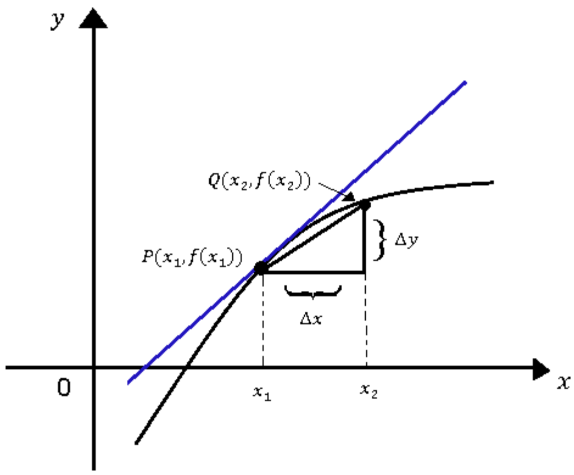
A derivada pode ser interpretada como um método para calcular o coeficiente angular da reta tangente.

Conforme pode ser observado na Figura 2, considere o gráfico de uma função $y=f(x)$ e os pontos $P(x_1,\ f(x_1))$ e $Q(x_2,f(x_2))$ pertencentes a este gráfico.

Ao observar a reta azul é possível identificar a inclinação em relação aos pontos P e Q. A função é igual ao coeficiente angular da reta tangente no gráfico onde a função tem os pontos de P, assim a derivada é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Figura 2- Inclinação dos pontos entre o intervalo de x_1 a x_2.



Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Seja uma função f definida em um ponto x_0. A derivada da função f no ponto x_0 é denotada como $f'(x_0)$ e pode ser calculada utilizando-se o limite dado por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ é denominado como taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x\,,x_0]$, sendo que na Figura 2 ele é visto como uma inclinação da reta.

Conforme apresentado em Araújo (2009) o acréscimo ou incremento é a diferença entre x e x_0 que é dada pela expressão $\Delta x = x - x_0$ e a diferença entre $f(x)$ e $f(x_0)$ é denominada o acréscimo ou incremento da função f relativa ao ponto x_0 e é dada pela fórmula $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

A seguir, apresentam-se algumas regras de derivação que serão utilizadas nas aplicações. Os resultados que serão apresentados foram obtidos utilizando a regra da potência e regra da derivada de uma função constante.

Regra da constante: Seja c uma constante e considere a função $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$.

Exemplo: Calcular a derivada da função $f(x) = 12$.

Usando a regra da constante, tem-se que $f'(x) = 0$.

Regra da potência: Seja n um número racional e a função $f(x) = x^n$, então a derivada dessa função é dada por $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exemplos: Calcular a derivada das seguintes funções:

a)
$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5.x^{5-1}$$
$$f'(x) = 5x^4$$

b)
$$f(x) = x^{-1}$$
$$f'(x) = -1.x^{-1-1}$$
$$f'(x) = -1x^{-2}$$
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Resultados

As aplicações a seguir demonstram casos envolvendo situações de educação e ciência com o objetivo de demostrar a aplicabilidade da derivada em aspectos da cidadania global.

Aplicação 1: Previsão do Tempo.

Um problema comum, visto todos os dias, é a previsão do tempo, a qual está em constante mudanças devido a diversos fatores.

O objetivo desta aplicação é apresentar o cálculo da derivada como um instrumento de apoio na interpretação da previsão do tempo.

De acordo com a aplicação exposta por Santana (2010), sabe-se que partir da meia noite a temperatura em uma determinada cidade varia de T graus em t horas, sendo definida pela seguinte função:

$$T = 0{,}1(400 - 40t + t^2) \ \ 0 \le t \le 12.$$

Usando-se a regra da derivada de uma função constante e a regra da potência, pode-se calcular a derivada de T em função do tempo t e obter:

$$\frac{dT}{dt} = 0{,}1\,.(-40 + 2.t).$$

Aplicando-se a propriedade distributiva e multiplicando-se a função acima por $0{,}1$ obtém-se:

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2.t.$$

Com o objetivo de calcular a derivada entre o período das cinco horas às seis horas, é necessário o cálculo da média destas horas. Assim tem-se $t = 5{,}5$. Aplicando este período na função derivada obtém-se:

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2\,.\,5{,}5$$
$$\frac{dT}{dt} = -4 + 1{,}1$$
$$\frac{dT}{dt} = -2{,}9\ graus$$

Portanto, verifica-se nesta aplicação que a variação da temperatura no período das cinco horas às seis horas é de $-2{,}9$ graus. Assim consegue-se perceber a variação de temperatura neste período e, consequentemente, a população poderá prevenir-se quando vai estar calor ou frio.

Aplicação 2: Custo de produtos.

Na Economia também ocorre problemas que envolvem a necessidade de se calcular a derivada. De acordo com uma aplicação apresentada em Stewart (2013), uma fábrica produz x produtos e tem seu custo total denotado por $C(x)$.

É possível obter o custo marginal de produção de x unidades de acordo com a seguinte expressão a qual envolve a derivada de $C(x)$:

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x).$$

Suponha que a produção de uma companhia é dada pela seguinte função:

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0{,}01x^2$$

em que x é a quantidade de itens produzidos e $C(x)$ é o custo total dado em dólares.

Aplicando-se as regras de derivação obtém-se o custo marginal de produção, que é dado por:

$$C'(x) = 5 + 0.02x.$$

Assim, se quiser obter o custo marginal de produção equivalente a 500 itens é necessário substituir o valor de x pela quantidade de itens, ou seja,

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = \$\ 15/item$$

Aplicação 3: Moléstia Epidêmica.

De acordo com uma aplicação apresentada em Flemming (2015), uma cidade x é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias do primeiro dia de epidemia) é aproximadamente, dado por:

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}\ .$$

Havendo a necessidade de se saber a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$, é necessário calcular a derivada da função $f(t)$ em relação a t. Portanto para um tempo t qualquer, a derivada é dada por:

$$f'(t) = 64 - t^2.$$

Assim, considerando $t = 4$, obtém-se a função $f'(4) = 64 - 16 = 48$. Logo, no tempo $t = 4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

Aplicação 4: Engenharia de Produção.

De acordo com uma aplicação apresentada por Flemming (2015), os analistas de produção verificaram que em uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dada pela seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 50(t^2 + t), & para\ 0 \leq t \leq 4 \\ 200(t+1), & para\ 4 \leq t \leq 8 \end{cases}.$$

Caso os analistas queiram saber a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho, deve se calcular a derivada da função $f(t)$ em função de t.

Aplicando-se as regras de derivação obtém-se a seguinte função derivada:

$$f'(t) = \begin{cases} 50(2t+1), & para\ 0 \leq t \leq 4 \\ 200, & para\ 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

A razão de produção após 3 horas de trabalho é dada por $f'(3)$ considerando $t < 4$. Logo, tem-se

$$f'(3) = 50(2\,.\,3+1) = 350.$$

Após 3 horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho. Se os analistas quiserem a razão de produção após 7 horas de trabalho, o cálculo da derivada é dado por $f'\,(7)$ considerando $t > 4$, obtendo-se $f'(7) = 200$. Assim após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

Caso os analistas queiram saber quantas peças serão produzidas na 8^a hora de trabalho, será necessário calcular a diferença entre a 8^a e 7^a hora de trabalho. Utilizando a função $f(t) = 200(t+1)$ e considerando $t = 7$ e $t = 8$, tem-se:

$$f(7) = 200\,(7+1)$$
$$f(7) = 200.(8)$$
$$f(7) = 1600.$$

$$f(8) = 200(8+1)$$
$$f(8) = 200.(9)$$
$$f(8) = 1800.$$

$$f(8) - f(7) = 1800 - 1600 = 200.$$

Conclusão

Este trabalho possibilita uma maior compreensão e aprofundamento em conceitos e regras de derivação.

Pode ser observado nas aplicações propostas que os conceitos que envolvem derivadas englobam aplicações em várias áreas do conhecimento e em diversas situações do cotidiano.

No contexto da previsão do tempo pode ser notado uma variação que depende de fatores como temperatura e ambiente. O mesmo pode-se dizer na área epidemiológica em que ter informações como quantidade de pessoas atingidas por determinada moléstia e o tempo em que a mesma se espalha são de extrema importância para erradicá-la.

Referências

ARAÚJO, M.J.V.C. Universidade Federal de Juiz de Fora. Instituto de Ciências Exatas. Cálculo I. 2009. Disponível em: http://www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2010/03/Cap%C3%ADtulo-5.pdf. Acessado em 30 abril de 2016.

EBERHARDT, D; PARMEGIANI, R. A implementação de experimentos de Fisíca para auxiliar na compreensão de noções básicas de cálculo. Disponível em: http://www.abenge.org.br/cobenge-2014/Artigos/129095.pdf. Acesso em: 06 de agosto de 2016.

FLEMMING, D.M; GONÇALVES, M.B. Cáculo - A Funções Limite Derivação Integração. 6.ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2015.

GUIDORIZZI, H.L. Um curso de Cálculo – Vol. 1. 5.ed. São Paulo: LTC, 2011.

PIRES, C. Cálculo para economistas. McGraw Hill, 2001.

ROCHA, M.R; VIEIRA, F.P. Aplicação de derivadas à economia, administração e ciências contábeis. Discpónivel em: https://ifgoiano.edu.br/ceic/anais/files/papers/20733.pdf. Acesso em: 06 de agosto de 2016.

SANTANA, A.M. Universidade Federal de Rondônia. - Aplicação das Derivadas. 2010. Disponivel em: http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf. Acessado em 05 de agosto de 2016.

SOARES, D.S. O interesse de alunos de biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT10/CC01046092065_A.pdf. Acesso em: 06 de agosto de 2016.

SOSSAE, R.C; SABLÓN, V.B; YACOUB. M.N.R.D. Ensino de derivadas no curso de Engenharia. Disponível em: http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/viewFile/75/88. Acesso em: 06 de agosto de 2016.

STEWART, J. Cálculo – Vol. 1. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VAZ, I.C; LAUDARES, J.B. A abordagem dos conceitos de limite, derivada e integral por professores em cursos de engenharia. Disponível em: http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2011/sessoestec/art1628.pdf. Acesso em: 06 de agosto de 2016.