ESTUDO DA DISTÂNCIA DE OPOSIÇÃO TERRA - MARTE NO PROBLEMA A DOIS CORPOS

L.A.Cortez[1],V.Carruba[1]

[1]IPD, UNIVAP, São José dos Campos, SP, 12244, Brazil
email: leo_cortez@ig.com.br

Resumo- O estudo do movimento de astros como planetas e asteróides pode se tornar um assunto extremamente complexo, devido as perturbações que esses corpos sofrem ao percorrerem suas órbitas. Entretanto, no Sistema Solar, as grandes distâncias entre os corpos e a enorme diferença entre a massa dos planetas e asteróides em relação à massa do Sol permitem que, em primeira aproximação, esse estudo possa ser realizado a dois corpos, ou seja, um pequeno corpo movendo-se ao redor de um corpo central muito maior. Nosso estudo apresenta uma resolução prática do problema a dois corpos, aplicada para os planetas Terra e Marte, onde demonstramos como é possível determinar a posição desses planetas e os momentos em que existe uma maior aproximação entre eles, com período de 2,135 anos. Mostramos também que as aproximações de distância mínimas se repetem ciclicamente, com período de 79,0 anos.

Palavras-chave: Órbita, Planetas, Marte, Terra, Kepler
Área do Conhecimento: Astrofísica, Matemática

Introdução

Em Astrofísica o “problema a dois corpos” consiste na determinação matemática do movimento de dois pontos de massa sob o efeito de uma força de atração gravitacional mútua.

Nas dinâmicas do Sistema Solar as grandes distâncias e variações entre as massas permitem que, em primeira aproximação, as órbitas da maioria dos planetas e satélites possam ser tratadas como um movimento a dois corpos, ou seja, um pequeno corpo movendo-se ao redor de um corpo central de massa muito maior.

Este estudo foi motivado pela necessidade dos astrônomos e engenheiros em determinar a posição dos astros, identificar os melhores momentos para sua observação ou mesmo analisar suas órbitas ao planejarem missões.

Missões como, por exemplo, a da sonda Dawn, que tem por objetivo entender a formação do sistema solar. Nesta missão a sonda deverá interceptar e orbitar dois dos maiores asteróides de nosso sistema, os protoplanetas Vesta e Ceres, de modo a estudá-los.

Neste artigo, através do cálculo das posições da Terra e de Marte, identificaremos os períodos onde existe uma maior aproximação entre os dois planetas (distância de oposição), tornando esses períodos ideais para a observação de Marte.

Metodologia

O estudo foi realizado da seguinte maneira:

- Pesquisa bibliográfica sobre a matemática necessária na resolução do problema.
- Concepção e construção de programas de computação na linguagem C# (KIMMEL, P 2002), necessários para efetuar o grande número de cálculos.
- Produção de gráficos apresentando os resultados processados.
- Validação, análises e conclusões acerca dos resultados obtidos.

Os Movimentos Planetários

O estudo do problema a dois corpos exige o entendimento dos movimentos planetários.

O Matemático e Astrônomo alemão Johannes Kepler formulou três leis matemáticas que descrevem os movimentos planetários:

1ª Lei: Os planetas movem-se em uma órbita elíptica, onde o Sol ocupa um dos focos.

2ª Lei: Um raio vetor projetado do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

3ª Lei: O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita elíptica.

Na Figura 1, podemos observar uma elipse representando a órbita de um corpo ao redor do Sol.

A segunda lei de Kepler diz que, se o planeta emprega para ir da posição C até a posição D o mesmo tempo empregado para ir de A até B, as áreas A1 e A2 são iguais.

A terceira lei permite-nos comparar as órbitas de dois corpos, pois afirma que:

$$\frac{P^2}{a^3} = constante$$

onde: P = Período Orbital.
a = Semi-eixo maior da órbita elíptica.

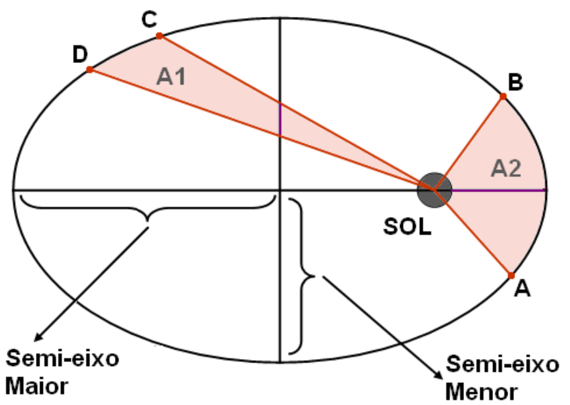

Figura 1- Representação das Leis de Kepler

Entretanto, foi Isaac Newton quem deu a interpretação do ponto de vista dinâmico às leis de Kepler. Newton afirmou que os planetas estão sujeitos continuamente a uma força atrativa imposta pelo Sol, nomeando-a força gravitacional.

Generalizando esta lei para o caso de duas massas colocadas em presença uma da outra, Newton estabeleceu a lei da gravitação universal, dada por (Murray & Dermott 1999, daqui por diante MD99, eq 1.1):

$$F = G\frac{m1m2}{d^2}$$

onde: G = constante da gravitação universal, dada por 6,67260 x 10^{-11}N.m^2/kg^2.
$m1$ e $m2$ = massas dos corpos.
d = distância entre as duas massas.

Elementos Orbitais

A Figura 2 apresenta os elementos orbitais. P determina o pericentro, enquanto que N o nó ascendente.

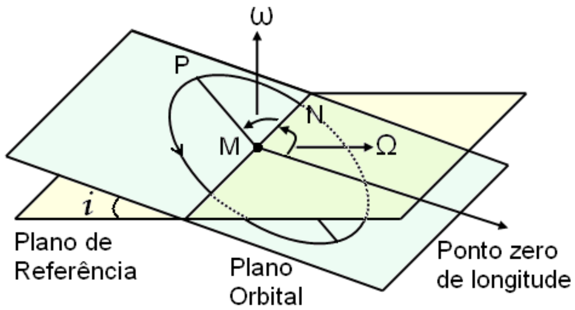

Figura 2- Elementos Orbitais

A partir de um conjunto de 6 constantes podemos descrever qualquer órbita arbitrária de 2 corpos. São elas (DANBY 1982):

- Semi-eixo maior da órbita elíptica (a)
- Excentricidade da órbita elíptica (e)
- Inclinação orbital (i)
- Longitude do nó ascendente (Ω)
- Argumento do Pericentro (ω)
- Tempo de passagem da partícula pelo pericentro (T)

Resolvendo o Problema a Dois Corpos

Para completar a resolução do problema a dois corpos, estudaremos a posição de uma partícula em um dado instante. Para isso, devemos introduzir dois novos parâmetros, a Anomalia Média (M) e a Anomalia Excêntrica (E), conforme mostrado na Figura 3.

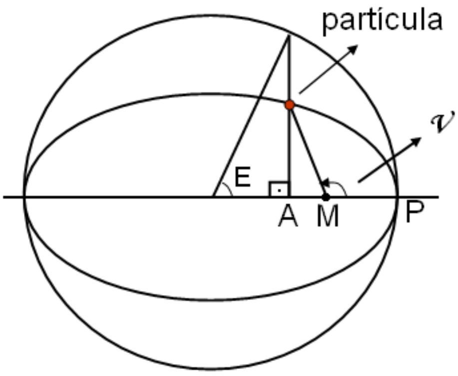

Figura 3- Anomalia Excêntrica

A Anomalia Média é dada por (MD99, eq 2.39):

$$M = n(t - T)$$

onde: n = taxa de variação da órbita.
t = instante desejado (data juliana)
T = tempo de passagem pelo pericentro (data juliana)

A Anomalia Excêntrica[1] é dada por (MD99, eq 2.52):

$$E = M + e\sin E$$

onde: e = excentricidade da órbita elíptica.
M = Anomalia Média.

Finalmente, podemos calcular a posição (X,Y) do corpo em seu plano orbital. As coordenadas X e Y são dadas por (MD99, eq 2.40):

$$X = a(\cos E - e) \quad \text{e} \quad Y = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$$

onde: e = excentricidade da órbita elíptica.
E = Anomalia Excêntrica.
a = Semi-eixo maior da órbita elíptica.

Resultados

Os resultados foram gerados a partir da escolha de um intervalo de datas. Para esse

1 Observe que a Anomalia Excêntrica exige um cálculo interativo. Inicialmente, E assumirá o valor de M, assim:
$E_1 = M + \sin(M)$, $E_2 = M + \sin(E_1) \cdots E_n = M + \sin(E_{n-1})$
A interação se encerrará quando:
$$|(E_n - E_{n-1})/E_n| < 10^{-9}$$
Onde 10^{-9} indica a precisão desejada no cálculo de E.

intervalo, foram calculadas as posições X e Y dos planetas Terra e Marte em seu plano orbital.

A Tabela 1 apresenta uma pequena amostra exemplificativa, gerada para os três primeiros dias de 2008 para o Planeta Terra.

Os valores de M e E estão expressos em graus, enquanto que os valores de X e Y estão expressos em unidades astronômicas[2].

Tabela 1- Amostra de Dados Gerados

Data	M	E	X	Y
01/01/2008	112,34	113,22	-0,4110	0,9188
02/01/2008	113,32	114,20	-0,4266	0,9119
04/01/2008	115,29	116,15	-0,4575	0,8974

A primeira análise feita visou estudar a trajetória dos planetas no decorrer de seu período orbital.

Os gráficos a seguir apresentam três visões distintas, representando um intervalo de 1000 dias a partir de 1/1/1985.

No gráfico da Figura 4 podemos perceber que as trajetórias plotadas a partir dos pontos X e Y calculados representam a órbita elíptica dos planetas.

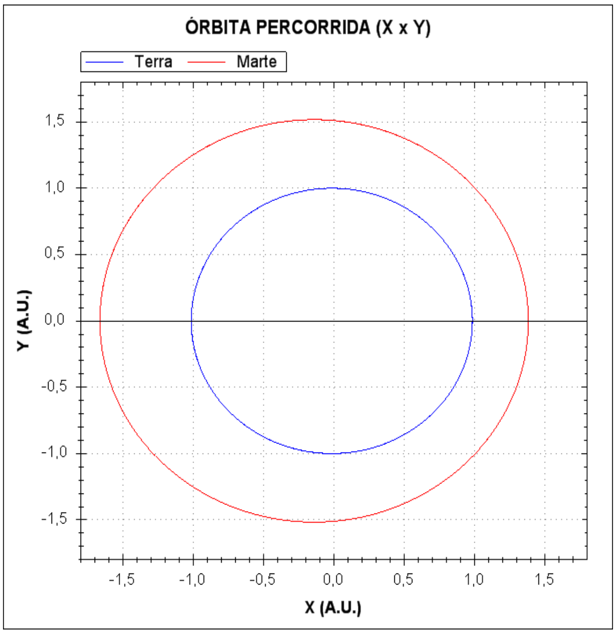

Figura 4- Órbita Percorrida

Nos gráficos das Figura 5 e Figura 6 podemos ver, individualmente, a variação de X e Y no tempo.

2 Uma unidade astronômica (A.U.) é uma unidade de medida de distância e seu valor equivale a aproximadamente 150 milhões de quilômetros. É definida, em termos práticos, pela distância média entre a Terra e o Sol. Seu valor atualmente aceito é de 149.597.870,691 Km.

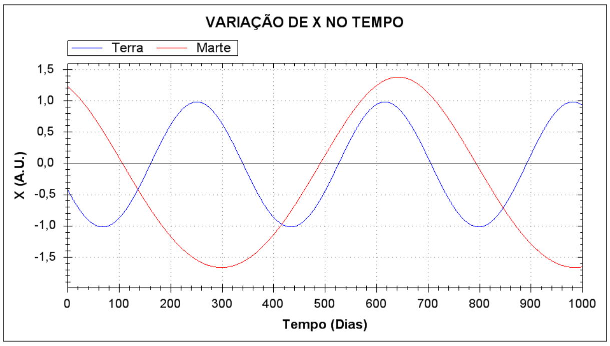

Figura 5- Variação de X no Tempo

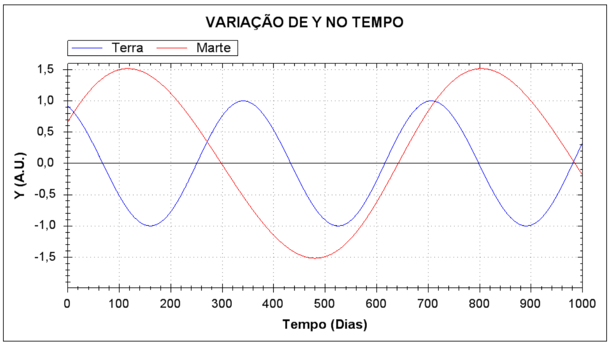

Figura 6- Variação de Y no Tempo

Na segunda análise, estudamos a distância entre os dois planetas, calculadas entre 1985 e 2005.

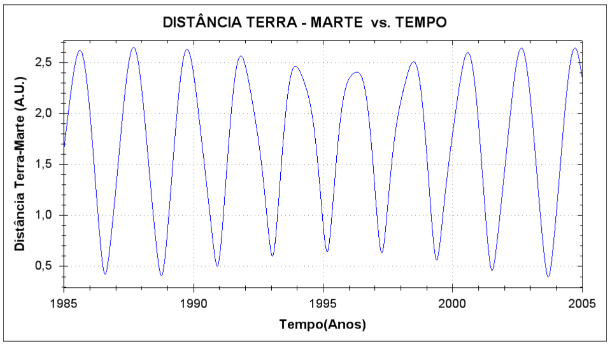

Figura 7- Distâncias entre 1985 e 2005

Reparem que a menor distância ocorreu no final de 2003. Neste ano, no dia 27 de agosto, a aproximação entre a Terra e Marte foi a maior dos últimos milhares de anos.

A seguir, na Figura 8, podemos observar as distâncias entre a Terra e Marte para os próximos anos, englobando o período entre 2008 e 2040.

Podemos observar que as próximas boas aproximações ocorrerão nos anos de 2018, 2020, 2033 e 2035.

Repare que a cada ciclo de 15 ou 17 anos ocorrem períodos ideais para a observação de Marte

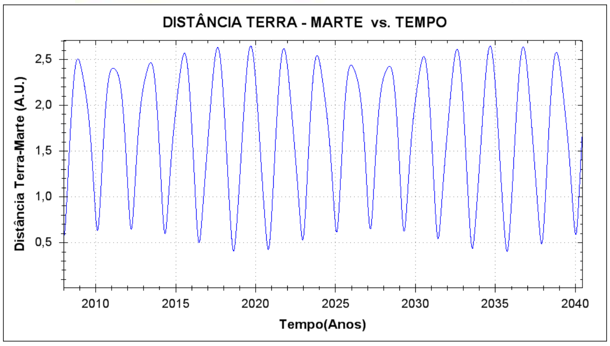

Figura 8- Distâncias entre 2008 e 2040

Por fim, identificamos que a cada ciclo de aproximadamente 79 anos as distâncias de oposição Terra-Marte se repetem.

Para demonstrar isso, analisaremos os períodos de 1920 a 1940 e posteriormente compararemos com o período de 2000 a 2020.

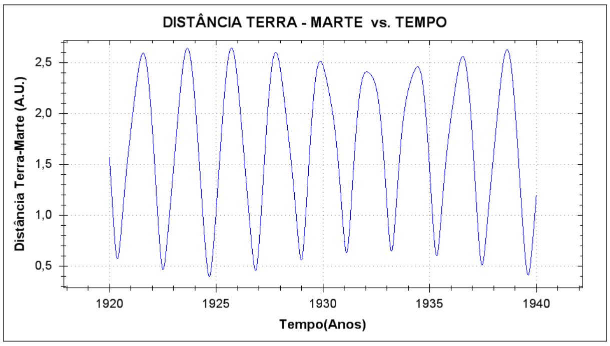

Figura 9- Distâncias entre 1920 e 2040

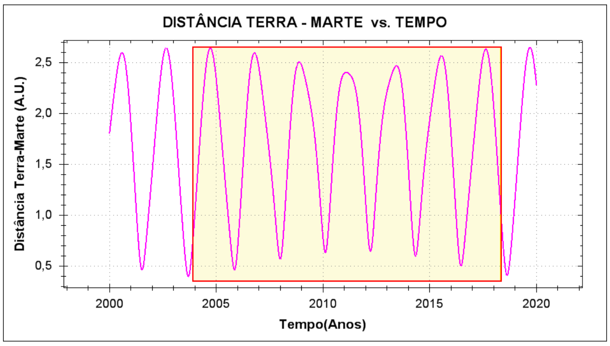

Figura 10- Distâncias entre 2000 e 2020

Visualmente fica difícil essa comparação. Entretanto, repare na área destacada pela caixa vermelha no gráfico da Figura 10. Transportando-a sobre o gráfico da Figura 9, obteremos uma nova figura.

Examinemos a Figura 11. A área inicialmente destacada se sobrepôs perfeitamente ao gráfico anterior, demonstrando que o ciclo de repetição ocorreu num intervalo de aproximadamente 79 anos.

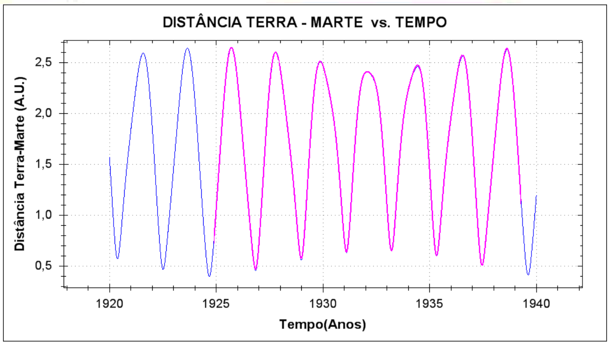

Figura 11- Sobreposição de ciclos

Conclusão

O estudo das distâncias de oposição Terra-Marte aqui apresentado demonstrou uma aplicação prática do problema a dois corpos.

Entretanto, há de se ressaltar que os dados aqui apresentados são aproximados pois o problema a dois corpos desconsidera perturbações de outros astros (MORBIDELLI, A 2002). Além disso, as inclinações das órbitas da Terra e de Marte são muito parecidas o que possibilitou-nos considerá-las coplanares para efeito desse estudo.

Ressaltamos também o quanto é importante a utilização de parâmetros precisos, que devem ser coletados de fontes confiáveis. Percebemos que diferenças mínimas na excentricidade das órbitas dos planetas ou mesmo em seu período orbital provocam grandes distorções nos resultados.

Por fim, deixamos como sugestão de uma possível aplicação para essa técnica o estudo de asteróides com inclinações orbitais pequenas em relação ao plano orbital da Terra.

Referências

- DANBY, J.M.A. Fundamentals of Celestial Mechanics. Ed. Willmann-Bell, 1982.

- KIMMEL, P. Advanced C# Programming. Ed. MCGraw-Hill Professional, 2002.

- MORBIDELLI, A. Modern Celestial Mechanics. Ed. Taylor & Francis, 2002.

- MURRAY, C.D; DERMOTT, S.F. 1999 (MD99) Solar System Dynamics. Ed. Cambridge Press, 1999.

- WIKIPEDIA. Two-body Problem. Disponível em : http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem. Acesso em 25-mai-2008.