PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO E TEORIA DE STURM-LIOUVILLE APLICADOS AO ESCOAMENTO DE FLUIDOS

***Adriane Sardinha Macedo*[1], *Thársis Souza Silva*[2], *Prof. Rodrigo Miyasaki*[3].**

[1]Universidade Estadual de Goiás/ Departamento de Matemática, Avenida. R 2, Jd. Novo Horizonte II – CEP 76200-000 Iporá-Go, adriane.sardinha@yahoo.com.br
[2]Universidade Estadual de Goiás/Departamento de Matemática, Avenida. R 2, Jd. Novo Horizonte II – CEP 76200-000 Iporá-Go, tharsis-souza@hotmail.com
[3]Universidade Estadual de Goiás/Departamento de Matemática, Avenida. R 2, Jd. Novo Horizonte II – CEP 76200-000 Iporá-Go, rodrigomiyasaki@yahoo.com.br

Resumo - Este trabalho fundamenta-se em Equações Diferenciais focalizando e explorando mais a fundo a especulação proposta por Charles-François Sturm e Joseph Liouville no que diz respeito a problemas de valores de contorno. Através da definição geral proposta por eles, desenvolve-se um estudo sobre difusão de massa no que se refere aos fluidos. O que é abordado pode ser aplicado a exemplos encontrados em Engenharia Mecânica, apontando caminhos que tem se mostrado úteis. Partindo de um exemplo inicia-se a verificação do objeto de estudo onde há a iniciação dos primeiros passos, abrindo, a partir daí, uma passagem com expectativas de resultados positivos a respeito do proposto inicialmente.

Palavras-chave: Sturm-Liouville, autovalores, autofunções, aplicações.
Área do Conhecimento: Ciências exatas e da terra

Introdução

Existem algumas situações físicas tais como o escoamento de água em um rio, o fluxo de uma corrente de ar, a condução de calor em uma barra metálica dentre outros que envolvem a dinâmica dos fluídos e calor. Essas circunstâncias despertam interesse em investigar uma área de estudo que permite desenvolver métodos de resolução para esses fenômenos.

Um caminho para chegar a este alvo foi encontrado nas Equações Diferenciais, começando desde os tipos mais simples de Equações Diferenciais de Primeira Ordem, depois passando por Ordens superiores e métodos mais complexos com séries, e até procedimentos numéricos. Chegamos por fim a Equações Diferenciais Parciais Separáveis onde a Teoria de Sturm-Liouville apresenta-se, como um método de âmbito geral, muito aplicado à resolução de exemplos que trabalham justamente as situações físicas mencionadas inicialmente.

Pesquisando sobre Equações Diferenciais e problemas físicos, é notável o vasto campo de estudo onde podemos unir matemática pura ao desejo de destrinchar entes matemáticos como proposto por Sturm-Liouville, que vem atender o objetivo inicial da pesquisa.

Dentre tantas situações que a teoria proposta por Sturm-Liouville, junto a Equações Diferenciais Parciais Separáveis, pode resolver, as relacionadas à difusão de massa, aplicável a Engenharia Mecânica, foram escolhidas como objeto de trabalho, com o objetivo de desenvolver este Teorema como método analítico para posteriormente, resolvermos tais aplicações e verificarmos a eficiência deste método em diversos exemplos.

Metodologia

Após uma pesquisa sistemática e aprofundada em Equações Diferenciais é possível uma compreensão dos métodos propostos por este objeto de estudo.

Os problemas de Sturm-Liouville formam uma classe ampla de problemas de valores de contorno onde o objetivo principal é encontrar autovalores, que posteriormente determinarão autofunções correspondentes respectivamente a cada autovalor.

Estes problemas estão definidos em uma forma geral:

$$[p(x)'y]' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{1}$$

Com condições de contorno:

$$\begin{aligned} a_1 y(0) + a_2 y(0) &= 0 \\ b_1 y(L) + b_2 y(L) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

No intervalo:

$$0 < x < L$$

Existem diversas aplicações que admitem resolução por este método. Algumas mais comuns são: Condução de calor em uma barra metálica, escoamento de fluídos, vibrações de cordas e membranas elásticas.

Após a pesquisa sobre os Problemas de Valores de Contorno de Sturm-Liouville e algumas de suas aplicações, este estudo se volta para o escoamento de fluídos, como dito inicialmente. Dentro desta linha de raciocínio são perceptíveis diversos exemplos como: Fluxo da água em um rio, escoamento de um fluído gasoso em um ambiente com obstáculos, o comportamento dos fluídos na convecção térmica, a distribuição de concentração de um fluído em um ambiente poroso, dentre tantos outros.

Faz-se necessário o desenvolvimento de alguns exemplos, permitindo mostrar ou não, se o método analítico trabalhado pode ser aplicado e se seus resultados podem ser aproveitados como fonte verdadeira de dados.

Considerando a seguinte situação:

Pelos poros de uma camada de rocha porosa, flui água com soluto. O soluto é transportado pelo movimento total do fluxo da água que é chamado de avecção. Este transporte também pode ocorrer pela dispersão mecânica, que acontece pelas variações da velocidade da água dentro dos poros, observe a figura 1.

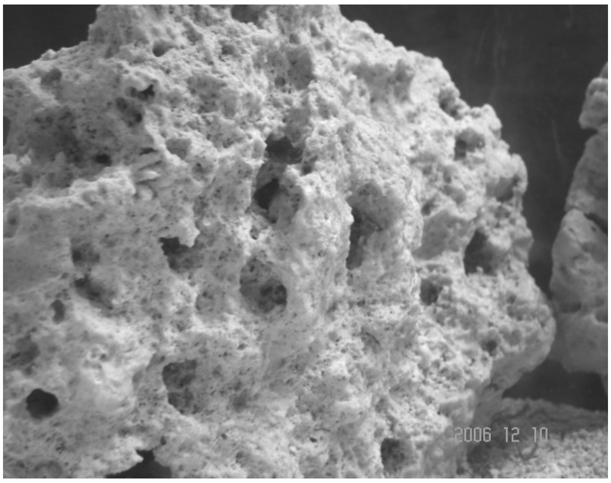

Figura 1: Exemplo de uma rocha porosa.

A forma unidimensional da equação de avecção – dispersão para um soluto não reativo dissolvido em um meio poroso saturado, homogêneo isotrópico sob um fluxo uniforme constante é:

$$C_t + vC_x = DC_{xx} \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \tag{3}$$

Onde, $C(x,t)$ é a concentração do soluto, v é a velocidade média linear da água, D é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica e L é o comprimento do caminho. Suponha que as condições de contorno sejam

$$C(0,t) = 0, \qquad C_x(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{4}$$

e a condição inicial

$$C(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \tag{5}$$

(Boyce e Diprima 2006, pág. 359).

Utilizando o método da separação de variáveis pode-se supor dentre outras formas, a seguinte

$$C(x,t) = X(x)T(t) \tag{6}$$

então a equação (3) pode ser separada em outras duas equações como

$$T' + \lambda DT = 0 \tag{7}$$

$$X'' - \frac{vX'}{D} + \lambda X = 0 \tag{8}$$

A constante λ é chamada de autovalor proveniente da separação de variáveis. O problema de Sturm-Liouville é justamente procurar os possíveis autovalores para logo após encontrar as autofunções que formaram a solução geral.

A equação (8) por sua vez é da forma (1), proposta como forma geral de Sturm-Liouville e pode ser assim escrita:

$$\left(\frac{-vxX'}{D}\right)' - \frac{vx\lambda X}{D} = 0 \tag{9}$$

Resolvendo a equação (8), através da utilização do método de separação de variáveis encontramos os autovalores λ_n em termos de β_n, da forma

$$\lambda_n = \beta_n^2 + \frac{v^2}{4d^2} \tag{10}$$

gerando a seguinte solução geral:

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n Dt} e^{\frac{vx}{2D}} \sin(\beta_n x) \tag{11}$$

Com β_n em termos de λ_n , isolado na equação (10)

$$\beta_n = \sqrt{\lambda_n - \frac{v^2}{4D^2}} \tag{12}$$

e utilizando o produto interno em forma de integral, que é uma condição de normalização, para que tenhamos um conjunto ortogonal completo temos para a constante multiplicativa

$$a_n = \frac{4D\beta_n^{\ 2}\int_0^L e^{-vx/2D} f(x)\sin(\beta_n x)\, dx}{\left(2LD\beta_n^{\ 2} + v\sin^2(\beta_n L)\right)} \tag{13}$$

Substituindo valores para a condição inicial *f(x)* e para os elementos constantes: coeficiente de dispersão hidrodinâmica (*D*), velocidade média linear da água (*v*) e o comprimento do caminho percorrido (*L*) podem-se obter a concentração em função do tempo e do espaço.

Como exemplo supõe-se:

$f(x) = x \ \ (g/cm^3),\ D = 0{,}5\ (cm^2/s),$

$v = 1\ (cm/s)\ e\ L = 10\ (cm)$

Onde $f(x)$ é dado em termos do caminho x, que pertence ao intervalo $0 \le x \le L$.

Utilizando as dez primeiras somas da equação (11) chegamos a uma solução que está representada pela seguinte superfície:

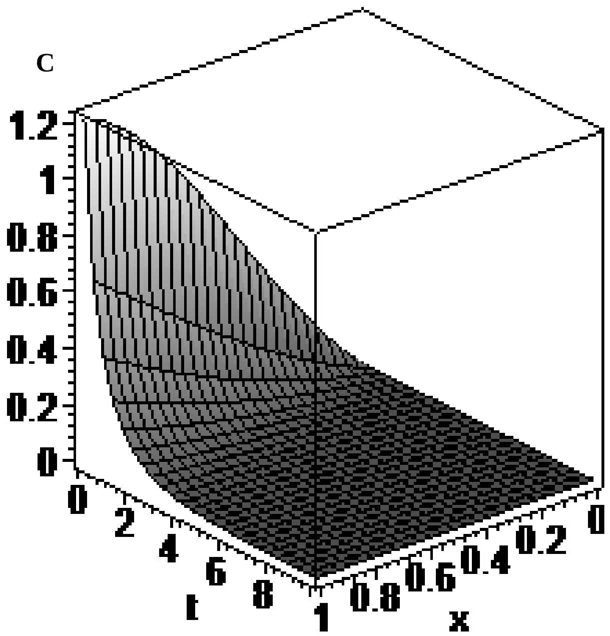

Gráfico 1: Solução da concentração em termos do espaço (x) e do tempo (t).

A superfície ilustrada pelo gráfico tem coordenada Z para a concentração, x é o caminho percorrido e y o tempo. O desenvolvimento da solução em função do tempo e do espaço é justamente aquele proposto pelas condições de contorno que rege como será a solução nas extremidades e a condição inicial que vai se modificando de acordo com a solução dada pela equação (11).

É notável através da observação em um ambiente poroso que contém certa concentração de soluto que, ao longo do processo de avecção, a concentração de soluto vai diminuindo em todo o ambiente com o passar do tempo. Isto pode ser verificado pelo Gráfico 1, ilustrando que quanto maior o tempo, menor a concentração de soluto, e chega a ser independente do espaço para um tempo muito grande.

Com base neste exemplo abre-se caminho para a resolução de outras aplicações com situações diferentes. Assim serão reunidas as condições necessárias para que se possa ver o que se conclui a partir destes dados.

Resultados Parciais

Até o momento a pesquisa tem mostrado que as soluções obtidas pelo método de Sturm-Liouville condizem com as observações físicas, indicando que pode ser utilizado como fonte de diversas informações.

O exemplo citado foi o primeiro estágio, dentre outros, na aplicação da teoria de Sturm-Liouville. Ele ilustrou a eficácia do artifício, mostrando ser útil, proporcionando a abertura de um grande leque de aplicações e induzindo um aprofundamento da pesquisa.

Tudo indica que cada situação-problema leva a diferentes formas de se encontrar autovalores (λ_n), e conseqüentemente autofunções. Em alguns casos pode-se chegar a Séries de Fourier e, a partir daí serem trabalhadas como tal, ou em outras formas de seqüências diversas, que permitem desenvolvimento diversificado.

Discussão

Uma pesquisa nesta direção de estudo abre caminho para a utilização da matemática aplicada, embora o campo seja muito vasto. Não é suficiente testar o procedimento apenas na resolução de exemplos, devido à infinidade de situações, mas existe a necessidade de uma pesquisa que permite concluir algo de âmbito geral e assim sistematizar sua aplicação com maior objetividade.

Conclusão

Nota-se que as soluções conseguidas até o momento, oferecem diversos dados sobre a situação correspondente. Estes dados permitem observar o que ocorre desde uma condição inicial, até o que acontece bem mais adiante dependendo de cada situação. Como exemplo, no modelo dado, é possível saber o que ocorre com a concentração depois de se passar muito tempo.

Resta verificar o que se pode concluir em torno da eficiência do método para outras aplicações, que podem ser desenvolvidas com problemas de Valores de Contorno associados à Sturm-Liouville.

Referências

BOYCE, DYPRIMA. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de contorno*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2002.

EDWARDS, C. H. e PENNEY, D. *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*. Rio de Janeiro: Editora PHB, 1995.

SALAS. HILLE. ETGEN. *Cálculo Volume II*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2005.

STEWART J. *Cálculo Volume II*. São Paulo: Editora Thomson, 2006.

THOMAS G. B. *Cálculo Volume II*. São Paulo: Editora Pearson, 2005.

ZILL, G. D. CULLEN, R. M. *Equações Diferenciais Vol.II*. São Paulo: Editora Pearson, 2006.