

## GENERALIZAÇÕES E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Uma experiência com alunos do Ensino Médio

**César Augusto Sverberi Carvalho<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>PUC-SP, augustosverberi@uol.com.br

**Resumo** - Este artigo relata os resultados da primeira sessão de uma seqüência didática aplicada para alunos de uma 1ª série do Ensino Médio. Esta seqüência didática faz parte de uma pesquisa que tem por objetivo verificar se é possível dar condições para que alunos generalizem termos de uma progressão aritmética (PA) e, em caso afirmativo, se esta generalização permite que estes alunos construam uma fórmula para o termo geral. O artigo apresenta discussão com teorias que fundamentaram tal pesquisa e descreve a metodologia “Engenharia Didática”, descrita por Artigue (1996), que foi utilizada para elaborar, aplicar e analisar a seqüência didática. Os resultados da primeira sessão revelaram que poucos alunos conseguiram construir um esquema generalizador para os termos de uma PA e outros chegaram perto de conseguir isto, o que indica que alunos conseguem generalizar termos de uma PA e esta generalização pode ser utilizada para levá-los à construção de uma fórmula para o termo geral.

**Palavras-chave:** Generalização de Padrões, Progressão Aritmética, Engenharia Didática, Ensino Médio.

**Área do Conhecimento:** Educação Matemática

### Introdução

O ensino de Álgebra tem sido apontado por pesquisadores da Educação Matemática como fonte de discussão quanto a seus métodos, a fim de que estes possibilitem ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Dentre estes pesquisadores, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, bem como o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal. Estes autores defendem que a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema, que deve ser realizado de forma a garantir o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Dentre os elementos caracterizadores de tal pensamento está o processo de generalização, apontado por Vale e Pimentel (2005) como importante para que os alunos criem expressões algébricas ou mecanismos que conduzam a estas.

Vale e Pimentel (2005) afirmam que o uso de padrões é um componente poderoso da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar. Elas consideram que as tarefas que envolvem a procura de padrões permitem promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Em uma pesquisa do GPEA<sup>1</sup>, Perez (2006) verificou que um grupo de alunos do Ensino Médio foi capaz de generalizar padrões através de diferentes estratégias. Tal pesquisa mostrou que os alunos conseguiram construir e explicar mecanismos de generalização para seqüências diversas e verificou que, por mais que o pensamento algébrico já estivesse sendo desenvolvido, os alunos tiveram dificuldades em escrever simbolicamente a regra geral de uma seqüência.

Após verificar nesta pesquisa alunos que ainda não haviam estudado Progressões generalizando e encontrando termos destas, me questionei sobre a possibilidade de propor um trabalho sobre Progressão Aritmética (PA) que capacitasse alunos do Ensino Médio a generalizar termos da seqüência e levasse-os à construção de uma fórmula para o termo geral.

### Metodologia

Para investigar se alunos generalizam termos de progressões aritméticas, atividades baseadas em observação e generalização de padrões foram desenvolvidas e propostas. Para aplicação e análise de tais atividades, foram utilizadas fases da Engenharia Didática definidas por Artigue (1996).

Machado (2002) conta que a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com uma dupla função, na qual ela

<sup>1</sup> Grupo de Pesquisa Educação Algébrica do Programa de Educação Matemática da PUC-SP.

pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

Esta autora salienta que a engenharia didática se caracteriza também pelo registro dos estudos feitos sobre um caso em questão e pela validação da pesquisa, feita sobretudo internamente, pois baseia-se na confrontação entre uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori*.

Procurei propor uma seqüência didática com atividades que contemplasse observação de seqüências diversas para posterior investigação de uma regra de generalização dos termos de progressões aritméticas. Neste artigo apresento as atividades e resultados da primeira sessão da seqüência didática, composta por três atividades.

### Atividade 1

Observem as seguintes seqüências:

- a) 0, 3, 6, 9, 12, ...
- b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...
- c) 4, 2, 0, -2, -4, ...
- d) □, ○, ✦, □, ○, ✦, ...
- e) 4, 8, 16, 32, 64, ...

Lucas e Joana conseguiram dizer quais os termos ou elementos que vinham a seguir em cada uma das seqüências. Vocês podem identificar, em cada seqüência, qual será o próximo termo?

### Atividade 2

<p>Observem as seguintes seqüências:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) 0, 3, 6, 9, 12, ...</li> <li>b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...</li> <li>c) 4, 2, 0, -2, -4, ...</li> <li>d) □, ○, ✦, □, ○, ✦, ...</li> <li>e) 4, 8, 16, 32, 64, ...</li> <li>f) 4, 2, 1, ½, ¼, ...</li> </ul>	<p>Características:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>I) crescente</li> <li>II) decrescente</li> <li>III) a diferença entre um termo e o seguinte (o sucessor) é constante</li> <li>IV) os termos são separados por vírgula</li> <li>V) um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante</li> <li>VI) os termos se repetem ciclicamente</li> <li>VIII) os termos da seqüência são números inteiros</li> </ul>
<p>Quais dessas características cada seqüência possui?</p>	

### Atividade 3

Observem a seguinte seqüência: 1, 5, 9, 13, 17, ...

- a) Qual será o próximo termo da seqüência?
- b) Qual será o vigésimo quinto - 25º - termo da seqüência?
- c) Qual será o 937º termo?

## Resultados

Para a primeira atividade da sessão, apenas 4 respostas "não esperadas" ocorreram. Essas 4 respostas recaíram na progressão aritmética decrescente, onde o próximo termo é um número inteiro negativo.

Duas duplas não deixaram traços de suas resoluções e responderam que o termo seguinte era o zero e uma dupla identificou o número 4 como próximo termo desta PA sem explicar o porquê.

Nesses três casos, creio que o fato dessa seqüência vir logo após de uma seqüência cíclica pode ter influenciado as respostas que se justificariam como seqüências cíclicas: (4, 2, 0, -2, -4, 0, 4, 2, 0, -2...) ou (4, 2, 0, -2, -4, 4, 2, 0, -2, -4, ...).

Os alunos Ada e Ciro identificaram o número -8 como próximo termo da PA, indicando também o número -10 como termo seguinte ao -8. Isso indica que a dupla percebeu que a seqüência evoluía somando -2 ao termo anterior, embora ao registrar no papel tenham omitido o número -6, conforme pode ser visto na Figura 1.

a) 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...  
 b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...  
 c) 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, ...  
 d) □, ○, ✦, □, ○, ✦, ...  
 e) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

Figura 1: Extraída do Protocolo da Atividade 1 de Ada e Ciro

Apenas quatro dos dezessete protocolos apresentam cálculos, sendo estes relativos à multiplicação ou adição para a seqüência e, uma progressão geométrica. Três duplas preferiram somar 64 com 64 para identificar 128, inclusive a dupla formada por Aldo e Léo. Já Edu e Mário preferiram multiplicar 64 por 2.

A seguir transcrevo parte de diálogos que explicitam essas resoluções:

-Tem que somar! Sessenta e quatro mais sessenta e quatro dá cento e vinte e oito. (Aldo e Léo)

-Vai dobrando! Quatro, oito, dezesseis, trinta e dois, sessenta e quatro, cento e vinte e oito. (Edu e Mário)

A Atividade 2 se diferencia da primeira por possibilitar uma observação mais profunda das seqüências presentes na Atividade 1.

Dos dezessete grupos formados, cinco duplas interpretaram a questão como sendo para designar uma característica a cada seqüência, o que sugere falta de atenção de alguns alunos na leitura do que a atividade solicitava. Outras duas duplas distribuíram as características para as

seqüências, indicando duas características a uma das seqüências.

Sobre as características I e II, crescente e decrescente, ocorreram poucas associações incorretas por parte dos alunos. Um trio e duas duplas associaram crescente à seqüência **b**, que possui um ciclo crescente.

Quanto à característica III, que diz respeito à PA, pode-se dizer que foi a mais associada incorretamente nessa atividade. Apenas o trio e a dupla formada por Edu e Mário identificaram que essa era característica das seqüências **a** e **c**, sendo que a dupla associou III também à progressão geométrica.

A falta de compreensão sobre a noção de “diferença constante” ficou mais evidente ao verificar que três duplas associaram essa característica à seqüência **b** e cinco duplas associaram-na com a seqüência **d**, ambas cíclicas. Além disso, cinco duplas associaram-na com a seqüência **f**, uma P.G.

A característica V, de uma PG, foi pouco associada incorretamente. Três duplas associaram essa característica à seqüência **a** e uma dupla associou-a à seqüência **c**, ambas progressões aritméticas.

A dupla formada por Aldo e Léo optou por associar essa característica à PA crescente. Pela transcrição da gravação, podemos identificar quando um aluno muda de opinião sobre a característica a ser associada e diz:

- *A a tá errada, olha! Três vezes um, três. Três vezes dois, seis. Três vezes três, nove.*

Essa dupla havia classificado a PA (0, 3, 6, 9, 12,...) como crescente mas ao perceber que esta poderia ser formada multiplicando três aos elementos do conjunto {0,1, 2, 3, ...} afirmou que cada termo era obtido multiplicando o termo anterior por uma constante.

A terceira atividade da sessão exigia identificação do próximo termo e de termos mais distantes de uma PA.

Todos os grupos indicaram corretamente o termo seguinte da seqüência envolvida no item **a**, o que confirma a facilidade dos alunos em observar padrões para indicar termos seguintes.

Para o item **b**, doze grupos indicaram corretamente o número 97 como vigésimo quinto termo, sendo que sete duplas e um trio mostraram ter resolvido a atividade por contagem, explicitando todos os termos anteriores ao vigésimo quinto.

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, ~~41~~, 45,  
49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93  
97.

Figura 2: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Mano e Raul

Das cinco duplas que indicaram outro valor, duas indicaram o vigésimo sexto termo, uma indicou um termo anterior da seqüência e duas duplas não compreenderam o que foi solicitado.

O item **c** exigia maior complexidade de raciocínio mas três duplas indicaram corretamente o termo distante, sendo que uma delas não apresentou a resolução. Duas duplas chegaram ao resultado observando que o resultado da multiplicação de 4 por 937 deve ser subtraído de 3 para se chegar a esse termo.

Figura 3: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Fábio e Mirna

Quatro duplas identificaram 3748 como o termo solicitado, sendo que duas delas efetuaram a multiplicação de 937 por 4. Três duplas deram como resposta 3749, que vem a ser o 938º termo da seqüência, mas apenas a dupla formada por Aldo e Léo mostrou ter efetuado a multiplicação anteriormente citada e somado ao resultado o número 1.

Aldo e Léo deixaram claro o que entenderam sobre esse item com o seguinte diálogo:

- *Aqui não vai somando quatro mais quatro? Então é novecentos e trinta e sete vezes quatro.*

- *Um, cinco, nove, três, sete. Não tem oito!*

O último comentário mostra que esse aluno percebeu que os números dessa seqüência nunca terminam em oito, afinal são todos ímpares. Isso levou a dupla a somar o número um ao resultado e dar como resposta um número ímpar.

O objetivo de possibilitar a elaboração de um mecanismo de generalização foi alcançado e outros alunos que não construíram um mecanismo eficiente chegaram perto de conseguir isto.

## Discussão

A Atividade 1 propiciou aos alunos observação de diferentes padrões de seqüências. Segundo Lee (1996), a chave para o sucesso em atividades de generalização de padrões parece estar na observação e esta deve ser pertinente à questão proposta.

Assim, considero que na maior parte das seqüências houve observações pertinentes. As poucas observações não esperadas, como a identificação do ciclo como termo, não comprometem os resultados obtidos.

Como a Atividade 2 tinha por objetivo possibilitar uma observação mais profunda e muitas duplas fizeram associações pertinentes, acredito que esse objetivo foi cumprido.

A percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto de idéias, segundo Mason (1996). Como a atividade privilegiava a descrição das seqüências, considero que esta também colaborou para que o aluno percebesse as seqüências como objetos passíveis de várias interpretações.

Para a terceira atividade, pode-se dizer que as duas primeiras fases do processo investigativo em generalização de padrões sugeridas por Herbert e Brown (1997) foram contempladas pelos alunos - a procura do padrão e o reconhecimento do mesmo.

Por mais que não tenham construído fórmula, o pensamento algébrico se fez presente no raciocínio utilizado pelos alunos que identificaram um termo distante do primeiro termo, pois segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico não se expressa de uma única forma e pode se manifestar através da linguagem aritmética.

Pode-se dizer então que esses alunos anteriormente citados atingiram a terceira fase do processo investigativo de Herbert e Brown (1997), correspondente à generalização do padrão proposto.

## Conclusão

Sobre a sessão inicial da seqüência didática proposta, pode-se dizer que os alunos demonstraram facilidade em indicar o próximo termo de seqüências diversas, pois ocorreram apenas quatro respostas não previstas, relativas a uma PA com razão negativa.

Os alunos souberam observar e associar características a diversos tipos de seqüências. No entanto, a característica de uma PA – diferença constante entre um termo e o sucessor – não foi compreendida por muitos alunos, tanto para a PA

com razão positiva quanto para a PA com razão negativa.

Os resultados dessa sessão indicam que o trabalho com progressões aritméticas deve contemplar a discussão de sua característica principal e a observação de vários tipos de seqüências para confrontar as diferenças entre estas e as particularidades de uma PA.

Poucos alunos conseguiram construir um esquema generalizador dos termos de uma PA, mas outros chegaram perto de construir um esquema. Isso indica que alunos conseguem generalizar termos de uma PA e esta generalização pode ser utilizada para levá-los à construção de uma fórmula para o termo geral.

## Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, 1996. 280 p.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Revista Quadrimestral Pro-Posições**, Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79 – 91, mar. 1993.

HERBERT, K.; BROWN, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. **Teaching Children Mathematics**, v. 3, p. 340-345, 1997.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.87-106.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 – 212.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. 119 p.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov/dez, 2005.