

# TÉCNICAS DE MONITORAMENTO E CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS ATRAVÉS DE CARTAS DE CONTROLE DA SOMA CUMULATIVA E DE CARTAS DE CONTROLE DE MÉDIA MÓVEL EXPONENCIALMENTE PONDERADA

**Rodrigo Rodenburg Magalhães<sup>1</sup>, Raquel Cymrot<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Presbiteriana Mackenzie/ Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIC/Mackenzie, Rua da Consolação, nº 896, prédio 6, 01302-907, São Paulo, SP, rodmagalha@terra.com.br

<sup>2</sup>Universidade Presbiteriana Mackenzie / Engenharia Elétrica, Rua da Consolação, nº 896, prédio 6, 01302-907, São Paulo, SP, raquelc@mackenzie.com.br

**Resumo-** A forma mais eficiente para se detectar mudanças na média de alguma variável de interesse de um processo de produção é obtida mediante a utilização das cartas de controle estatístico. Os gráficos de controle de soma cumulativa (CUSUM) e o gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) são alternativas bastante eficazes quando se deseja observar pequenas mudanças em um processo. Nestes casos, tais métodos se mostram mais ágeis e estimam com maior credibilidade do que os gráficos de controle de Shewhart. Foram realizadas simulações através das quais se podem observar a eficiência e as vantagens de um método sobre o outro. Isso é de significativa importância, já que a velocidade e precisão na identificação de qualquer anomalia em processos são fatores decisivos para aperfeiçoá-los.

**Palavras-chave:** Cartas de controle, cartas de Shewhart, carta CUSUM, carta EWMA

**Área do Conhecimento:** Estatística

## Introdução

Para saber se um processo de produção em série atinge a qualidade desejada, é necessário se observar esse processo e avaliá-lo. Pode haver diversas definições para a qualidade, como a qualidade ser a adequação para o uso ou a qualidade ser inversamente proporcional à variabilidade do processo de produção (MONTGOMERY, 2004).

Segundo Montgomery (2004), a qualidade pode ser analisada de várias maneiras, denominadas dimensões da qualidade, a saber: desempenho do produto, confiabilidade do produto, durabilidade do produto, facilidades de utilização da assistência técnica, estética do produto, características do produto, qualidade percebida (reputação do produto e/ou fabricante) e conformidade com as especificações do projeto original.

Através de técnicas de monitoramento com cartas de controle, é possível observar tais processos e verificar uma possível existência de qualquer anomalia no mesmo, isto é, podem-se detectar variações na centralização e/ou na dispersão do processo. Fica claro, no entanto, que o objetivo é identificar essas anormalidades da maneira mais rápida possível e também descobrir quando tal anomalia passou a infligir o processo, para que se identifique a causa da mudança e se corrija o erro mais rapidamente.

As cartas de controle também são úteis para se identificar mudanças que favoreçam o processo, de modo a poder incorporá-las ao mesmo.

O objetivo deste trabalho é comparar diversos tipos de cartas de controle, quando em cada momento apenas é realizada uma medição ou observação e quando o deslocamento da média é igual a um desvio padrão. Posteriormente, serão estudados os casos em que ocorrem outros deslocamentos para a média e o desvio padrão do processo.

## Cartas para o controle estatístico de processos

Existem vários tipos de cartas de controle que visam assegurar a qualidade de um processo de produção.

Diz-se que um processo está estável quando existe a repetibilidade de resultados, isto é, quando não há causas especiais interferindo no processo. Só há sentido em controlar estatisticamente um processo que esteja estável.

As cartas de Shewhart levam em conta os aspectos estatísticos como a probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle mesmo não tendo havido mudanças no processo e somente consideram a informação relativa ao último ponto coletado.

As cartas de Shewhart foram modificadas acrescentando-se critérios adicionais para a verificação da estabilidade do processo.

Outras técnicas, como a carta de controle da soma cumulativa (*Cumulative Sum*, CUSUM) e a

carta de controle de média móvel exponencialmente ponderada (*Exponentially Weighted Moving Average*, EWMA), foram desenvolvidas. Tais técnicas levam em conta todas as observações existentes até o momento e em relação à carta de Shewhart levam vantagem quando há apenas uma observação a cada tempo observado e/ou ocorrem mudanças na média do processo inferiores a  $1,5\sigma$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão da variável em observação (EDWAN, 1963).

Na carta de controle de Shewhart estabelecem-se os limites de controle superior e inferior em torno da média do processo. Esses limites são mais comumente dispostos  $3\sigma$  acima e  $3\sigma$  abaixo deste valor alvo, resultando que em um processo sob controle há aproximadamente 0,27% de probabilidade de um ponto cair fora desses limites.

Em um processo ideal a média será igual ao valor alvo, valor esse que é estabelecido de acordo com as especificações do processo. Um sinal de que o processo merece atenção, ou seja, não está estável, é quando um ponto cai fora dos limites de controle.

Na carta de controle de Shewart modificada utilizam-se os mesmos princípios da carta de Shewhart tradicional e adicionam-se, além dos limites de controle, outros critérios para a identificação de uma anomalia no processo. Estes critérios adicionais a serem seguidos visam minimizar o tempo que se leva para encontrar alguma alteração no processo.

Existem vários critérios adicionais que podem ser usados pelo pesquisador. Grande parte da indústria de São Paulo adota dois critérios adicionais, a saber: não haver sete pontos consecutivos crescendo ou decrescendo e não haver sete pontos consecutivos acima ou abaixo da média, tanto para o gráfico da média como para o gráfico da amplitude. Estes serão os critérios adotados neste trabalho.

A utilização do CUSUM na prática é bem similar à utilização das outras cartas de controle. Sua aplicação consiste em plotar as somas acumulativas das sucessivas observações de um processo.

$$S_T = \sum_{t=1}^T (x_t - k) \quad (1)$$

sendo  $x_t$  igual a observação no instante  $t$  com  $1 \leq t \leq T$  e  $k$  o valor de referência.

A média de pontos consecutivos é proporcional à inclinação da linha do gráfico da soma cumulativa em função do tempo. Uma alteração na média do processo será percebida como uma alteração na inclinação do gráfico do CUSUM e o número de resultados relevantes para a determinação dessa mudança também será indicada no gráfico, associada com a mudança na média (HUNTER, 1986).

No CUSUM o valor da média corresponde a uma inclinação de  $0^\circ$ , o qual é denotado por  $k$  ou valor de referência. O intervalo de decisão é determinado por  $h$ , função da variabilidade do processo, no mesmo sentido que o tamanho dos limites de controle num gráfico da carta de controle de Shewhart (PAGE, 1961).

A escolha destes dois parâmetros influencia diretamente o tempo que se leva pra perceber uma mudança no processo. Essa escolha deve ser tomada de acordo com o tamanho na alteração da média do processo (em função do desvio padrão do mesmo) que se quer observar.

Edwan (1963) demonstrou que o tempo da identificação da mudança é função do desvio padrão e dos parâmetros  $k$  e  $h$ , ou seja, os parâmetros escolhidos para identificar grandes mudanças não terão a mesma eficiência quando se deseja observar pequenas variações. Neste caso devem-se escolher novos parâmetros.

A carta de controle EWMA, assim como a carta CUSUM, utiliza todos os dados coletados anteriormente e consiste em dar menos peso, menor relevância ao dado, na medida em que ele for ficando mais “velho”.

$$EWMA = \hat{x}_{t+1} = \lambda x_t + (1 - \lambda)\hat{x}_t \quad (2)$$

Com:

$\hat{x}_{t+1}$  = valor previsto no tempo  $t+1$  (novo EWMA)

$x_t$  = valor observado no tempo  $t$

$\hat{x}_t$  = valor previsto no tempo  $t$  (velho EWMA)

$x_t - \hat{x}_t$  = erro observado no tempo  $t$

$\lambda$  = constante que determina o tamanho da memória do EWMA

A escolha da constante  $\lambda$ , assim como o  $k$  e o  $h$  utilizados no CUSUM, tem um importante papel no tempo que se leva pra identificar a mudança. O tempo pra se identificar a mudança, a grandeza da mudança que se quer identificar e o parâmetro  $\lambda$  estão diretamente relacionados. Quão menor o valor de  $\lambda$ , maior a influência dos dados anteriores e vice-versa.

## Materiais e Métodos

Foram gerados aleatoriamente 100 amostras de tamanho 50. Cada valor foi gerado a partir de uma distribuição Normal. Para cada amostra os trinta primeiros números foram gerados a partir de uma distribuição Normal com média 10 e desvio padrão 1,0. Para os vinte últimos números a média utilizada foi igual 11, mantendo-se o mesmo desvio padrão. Houve, portanto, um acréscimo de um desvio padrão na média.

Para cada amostra foram construídas as cartas de controle de Shewhart tradicional, a

Shewhart modificada, CUSUM utilizando  $k = 0,5$  e  $h = 5$  e EWMA com  $\lambda = 0,1$ . As quatro cartas foram então analisadas quanto ao fato de terem sinalizado ou não alguma alteração quando esta ainda não havia ocorrido, isto é, antes da 31ª observação. Foram também anotados em que momento as cartas detectaram pela primeira vez a ocorrência da mudança na média após este fato ter ocorrido, isto é após a 30ª observação.

Como ocorreram amostras onde as mudanças não haviam sido detectadas até o instante 50, optou-se por utilizar o teste não paramétrico de Friedman para comparar se em média as quatro cartas apontaram a ocorrência da mudança da média no mesmo instante.

Optou-se por utilizar o teste não paramétrico de Friedman com ajustes, devido à ocorrência de empates nos postos atribuídos em uma mesma amostra. Foram realizados a seguir testes de hipótese para a diferença entre as médias dos instantes em que os gráficos detectaram a mudança ocorrida. Tanto o ajuste do teste de Friedman quanto os testes de hipótese para os contrastes foram realizados segundo Conover (1999).

Para comparar se a proporção de falsos alarmes, isto é, a proporção da carta detectar uma mudança no processo que na realidade não ocorreu, foi igual para os quatro tipos de cartas de controle foi realizado o teste Q de Cochran. Para testar se cada par de tipos de cartas de controle tem a mesma probabilidade de falsos alarmes foram realizados testes não paramétricos de McNemar (CONOVER, 1999).

Foram calculados os níveis descritivos (valor P) de cada teste e para todos os testes de hipótese realizados foi usado um nível de significância de 5%.

O programa MINITAB foi utilizado na geração das amostras, na construção dos gráficos de controle e na realização de alguns testes não paramétricos.

## Resultados

A Tabela 1 mostra os tipos das cartas de controle nos quais se observou o momento em que houve detecção da mudança da média a partir do instante em que esta ocorreu, bem como a soma dos postos atribuídos a estes instantes e seus respectivos postos médios.

Tabela 1 – tipo da carta de controle, soma dos postos atribuídos e posto médio para cada tipo de carta de controle.

Carta de controle	Soma dos postos	Posto médio
Shewhart	357,0	3,570
Shewhart modificada	282,5	2,825
CUSUM	158,5	1,585
EWMA	202,0	2,020

Para testar a hipótese  $H_0$  de que em média os instantes em que os quatro tipos de carta de controle, a saber: Shewhart, Shewhart modificada, CUSUM e EWMA, detectaram a mudança de um desvio padrão ocorrida na média do processo são iguais foi realizado o teste ajustado de Friedman e calculada a estatística  $T_2 = 131,3775$  que tem distribuição de Fisher com graus de liberdade 3 ( $n^\circ$  de tipos de carta de controle - 1) e 297 ( $(n^\circ$  de amostras - 1) x ( $n^\circ$  de tipos de carta de controle - 1)). Ao nível de significância de 5% a região crítica é: R.C. =  $\{T_2 \mid T_2 \geq 2,6350\}$ , logo se rejeita  $H_0$  ( $P = 3,53E-54$ ) e afirma-se que, em média, os instantes em que os quatro tipos de carta de controle detectaram a mudança de um desvio padrão ocorrida na média do processo não são iguais.

Foram testados todos os contrastes dois a dois. Considera-se que dois tipos de carta de controle não detectam a mudança ocorrida em média no mesmo momento se o valor absoluto da diferença da soma de seus postos exceder 21,3445. Este valor é calculado em função dos postos obtidos, do número de variáveis (tipos de cartas de controle), do número de respostas e do valor  $t_{297;2,5\%}$  da distribuição t de Student.

A Tabela 2 apresenta os contrastes realizados, a diferença absoluta das soma dos postos, o nível descritivo P de cada teste e a conclusão obtida ao nível de significância de 5%.

Tabela 2 – Contrastes entre os tipos de cartas de controle Shewhart (1), Shewhart modificada (2), CUSUM (3) e EWMA (4), diferença absoluta entre as soma de postos, nível descritivo do teste realizado e conclusão obtida.

Contrastes	Diferença absoluta	P	Conclusão
(1) e (2)	74,5	2,221E-07	rejeita-se $H_0$
(1) e (3)	198,5	9,536E-17	rejeita-se $H_0$
(1) e (4)	155,0	4,129E-14	rejeita-se $H_0$
(2) e (3)	124,0	7,451E-12	rejeita-se $H_0$
(2) e (4)	80,5	5,53E-08	rejeita-se $H_0$
(3) e (4)	43,5	4,30E-04	rejeita-se $H_0$

Pode-se, portanto, concluir ao nível de significância de 5% que todas as cartas de controle diferem entre si quanto ao momento que em média detectam a mudança de um desvio padrão ocorrida na média do processo sendo a melhor carta a de CUSUM seguida pela carta EWMA, carta de Shewhart com modificação e carta de Shewhart.

Para testar a hipótese  $H_0$  de que as proporções de falso positivo são as mesmas para os quatro tipos de carta foi utilizado o teste Q de Cochran.

A Tabela 3 abaixo mostra as proporções com que cada tipo de carta de controle detectou uma mudança na média do processo quando esta ainda não tinha ocorrido (falso positivo)

Tabela 3 – proporção de falso positivo para os quatro tipos de cartas de controle

Carta de controle	Probabilidade de falso positivo
Shewhart	0,17
Shewhart modificada	0,40
CUSUM	0,03
EWMA	0,02

Obteve-se a estatística  $Q = 74,2895$ , a qual tem distribuição Quiquadrado com 3 graus de liberdade ( $n^\circ$  de tipos de carta de controle – 1). Ao nível de significância de 5%, rejeitou-se  $H_0$  ( $P = 5,14E-16$ ) e afirma-se que estas proporções não são iguais.

Para testar se as probabilidades de falsos positivos para cada par de cartas de controle são iguais foram realizados testes de McNemar. Os resultados destes testes estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Contrastes entre as proporções de falsos positivos para os quatro tipos de cartas de controle Shewhart (1), Shewhart modificada (2), CUSUM (3) e EWMA (4), estatística para o teste de McNemar, nível descritivo do teste realizado e conclusão obtida

Contrastes	Estatística de McNemar	P	Conclusão
$p_1$ e $p_2$	19,59	9,58E-06	rejeita-se $H_0$
$p_1$ e $p_3$	3,00	2,58E-03	rejeita-se $H_0$
$p_1$ e $p_4$	2,00	7,29E-04	rejeita-se $H_0$
$p_2$ e $p_3$	33,39	7,54E-09	rejeita-se $H_0$
$p_2$ e $p_4$	36,10	1,87E-09	rejeita-se $H_0$
$p_3$ e $p_4$	2,00	1,00E+00	não se rejeita $H_0$

Ao nível de significância de 5%, conclui-se que a proporção de falsos positivos é maior na carta de Shewhart modificada e que a carta de Shewhart possui maior proporção de falsos positivos do que a carta CUSUM e a carta EWMA.

## Discussão

O CUSUM foi o método que obteve o melhor desempenho na identificação da mudança da média. Ele foi ligeiramente melhor que o EWMA, porém isto pode ser apenas uma questão de ajuste de parâmetros.

Também a proporção de falsos positivos foi inferior quando se utilizaram as cartas CUSUM e EWMA.

## Conclusão

Quando a média foi deslocada em um desvio padrão, a carta de CUSUM foi a mais indicada, seguida da carta EWMA. Estas duas cartas apresentaram um desempenho muito superior em relação às cartas de Shewhart e Shewhart com modificação.

Esta conclusão veio ao encontro com a teoria apresentada em diversos artigos.

Na continuação deste projeto de iniciação científica pretende-se estudar o comportamento das cartas de controle aqui apresentadas com outros valores de parâmetros  $k$ ,  $h$ ,  $\lambda$ , outros deslocamentos da média e deslocamentos do desvio padrão, a fim de melhor compreender a funcionalidade destes métodos e perceber em quais casos cada carta melhor se aplica.

## Agradecimento

Os autores agradecem o apoio do Instituto Presbiteriano Mackenzie para a realização desta pesquisa.

## Referências

- CONOVER, W.J. **Practical Nonparametric Statistics**. 3. ed. New York: Wiley, 1999.
- EDWAN, W. D. When and How to Use Cu-Sum Charts. **Technometrics**, V. 5, n. 1, p. 1-22, 1963.
- HUNTER, J. S. The Exponentially Weighted Moving Average. **Journal of Quality Technology**, V. 18, n. 4, p. 203-210, 1986.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4. ed. Rio de Janeiro, LTC, 2004.
- PAGE, E. S. Cumulative Sum Charts. **Technometrics**, V. 3, n. 1, p 1-10, 1961.