UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE REAMOSTRAGEM BOOTSTRAP EM APLICAÇÂO NA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

***Ana Lucia Tucci Rizzo*[1]*, Raquel Cymrot*[2]**

[1]Universidade Presbiteriana Mackenzie/ Engenharia de Produção, Bolsista PIBIC/CNPq, Rua da Consolação, nº 896, prédio 6, 01302-907, São Paulo, SP, analu_rizzo@hotmail.com
[2]Universidade Presbiteriana Mackenzie / Engenharia Elétrica, Rua da Consolação, nº 896, prédio 6, 01302-907, São Paulo, SP, raquelc@mackenzie.com.br

Resumo- Em diversas ocasiões dentro da atuação profissional de um Engenheiro de Produção é necessária a estimação de determinado parâmetro. A técnica de reamostragem Bootstrap é muito útil por não necessitar de muitas suposições para estimação de parâmetros das distribuições de interesse. Este artigo apresenta os diferentes métodos de cálculo de intervalos de confiança utilizando a técnica de reamostragem Bootstrap. Tais métodos são: o Intervalo de Confiança Bootstrap Percentil, o Intervalo de Confiança Bootstrap Percentil das Diferenças, o Intervalo de Confiança Bootstrap t, o Intervalo de Confiança Percentil Corrigido em Relação ao Viés (BCPB) e o Intervalo de Confiança de Correção de Vício Acelerado (BCa). Para aplicação destas técnicas foi realizado um estudo de caso para a estimação dos parâmetros média e variância do comprimento de parafusos. Como as distribuições de probabilidades dos parâmetros a serem estimados eram conhecidas foram também calculados os intervalos de confiança baseados nas distribuições de probabilidades destes estimadores e comparados os resultados.

Palavras-chave: Reamostragem; Método Bootstrap; Intervalo de confiança.
Área do Conhecimento: Engenharias.

Introdução

Ao se realizar uma análise de um processo de produção muitas vezes é necessária a estimação de algum parâmetro deste processo. Este parâmetro pode ser uma média, uma variância, uma proporção, uma amplitude de uma carta de controle estatístico de processos, máximos, mínimos e até mesmo alguns índices criados para a análise daquela situação.

Técnicas de reamostragem são úteis em especial quando o cálculo de estimadores por métodos analíticos for complicado. Devido a sua generalidade, a técnica Bootstrap se encaixa na solução de problemas complexos, pois possibilita a estimação pontual e por intervalo de diversos parâmetros.

Muitas vezes a distribuição de probabilidade é desconhecida. Nesse caso o Bootstrap é muito útil, pois é uma técnica que não exige diferentes fórmulas para cada problema e pode ser utilizada em casos gerais, não dependendo da distribuição original do parâmetro estudado.

Quando a distribuição do parâmetro a ser estimado é conhecida, a coincidência entre o intervalo paramétrico baseado na distribuição de probabilidades do parâmetro e o intervalo Bootstrap reforçam a hipótese de veracidade a respeito das suposições do modelo paramétrico.

Este trabalho apresenta as diversas formas de cálculo de intervalos de confiança Bootstrap e aplica tal ferramenta de análise estatística na estimação da média e da variância do comprimento de parafusos.

A técnica de Bootstrap

Para realizar o teste utilizando a técnica Bootstrap é preciso colher uma amostra de tamanho n, que será denominada amostra mestre. Essa amostra deve ser coletada de maneira planejada, uma vez que se esta amostra for mal tirada e não representar bem a população, a técnica de Bootstrap não levará a resultados confiáveis.

Hesterberg et al. (2003) afirmam que a amostra mestre representa a população da qual foi retirada. As reamostras desta amostra mestre representam o que se deve obter quando se retiram muitas amostras da população original. A distribuição Bootstrap da estatística, baseada em muitas reamostras, representa uma distribuição amostral desta estatística.

Para que a aplicação da técnica resulte em valores confiáveis devem ser feitas, a partir da amostra mestre, centenas ou até milhares de reamostras do mesmo tamanho n. É importante que a reamostragem seja realizada com reposição, sempre selecionando os valores de forma aleatória. Deve-se utilizar algum programa computacional para a geração de números aleatórios a partir de uma distribuição discreta pré-estabelecida (distribuição da amostra mestre).

Uma vez geradas as reamostras, deve-se calcular para cada reamostra a estatística solicitada no problema. Essa técnica não altera nenhum valor da amostra mestre, ela apenas trabalha na análise da combinação dos valores iniciais com a finalidade de se obter as conclusões desejadas.

A variabilidade presente no Bootstrap é dada pela escolha da amostra mestre e pelas reamostras, sendo a variabilidade devido à escolha da amostra mestre a mais significativa.

A distribuição Bootstrap usualmente tem aproximadamente a mesma forma e amplitude que a distribuição amostral, porém está centrada na estatística dos dados originais (amostra mestre), enquanto a distribuição amostral está centrada no parâmetro da população.

Segundo González Manteiga, Prada Sánchez e Romo Urroz (1994) uma aplicação da metodologia Bootstrap é obter intervalos de confiança confiáveis. Há diversas técnicas distintas para o cálculo de intervalos de confiança Bootstrap. A primeira delas é apresentada a seguir:

I.C.bootstrap=[estatística ± t x $SE_{bootstrap}$] (1)

, sendo n o tamanho da amostra mestre, t encontrado utilizando-se (n-1) graus de liberdade, N o número de reamostras realizadas e $SE_{bootstrap}$ igual ao desvio padrão das estatísticas nas N reamostras (HESTERBERG et al., 2003).

O intervalo de confiança Bootstrap t só funciona bem quando a estatística Bootstrap tem um vício desprezível e quando a distribuição Bootstrap for aproximadamente normal.

A segunda técnica de cálculo do intervalo de confiança Bootstrap é denominada intervalo de confiança percentil. Para uma confiança (1 – α)100%, encontra-se o percentil (1 – α/2)100 % e o percentil (α/2)100% da estatística nas reamostras (HESTERBERG et al., 2003).

A terceira técnica de cálculo do intervalo de confiança Bootstrap também é denominada intervalo de confiança percentil e é calculado através dos percentis das diferenças dos valores das estatísticas das reamostras em relação ao valor médio desta mesma estatística nas reamostras (MONTGOMERY; RUNGER, 2003).

Para verificar se o intervalo de confiança t calculado é confiável podemos comprá-lo com o intervalo de confiança percentil. Se o vício for pequeno e a distribuição bootstrap for aproximadamente normal, os dois intervalos irão apresentar valores muito próximos. O intervalo de confiança Bootstrap t acaba servindo mais como prova da suposição de normalidade da distribuição Bootstrap.

Segundo Efron e Tibshirani (1986), se o vício e a assimetria estão presentes de forma muito forte é mais recomendável que se utilize métodos de Bootstrap de correção como o Método BCPB e o método BC_a.

No cálculo do intervalo de confiança BCPB os extremos do intervalo são os percentis da distribuição Bootstrap ajustados para corrigir o vício e a assimetria desta distribuição.

Por exemplo, para encontrar um intervalo de confiança BCPB com 95% de confiança, é preciso ajustar os percentis que para um cálculo de intervalo de confiança Percentil tradicional seriam 2,5% e 97,5% para outros valores, a fim de corrigir o vício e assimetria. Se a estatística for viciada para cima o BCPB move os extremos para a esquerda e se a estatística for viciada para baixo o BCPB move os extremos para a direita.

Para realizar o cálculo do intervalo de confiança BCPB deve-se primeiramente ordenar as N estimativas Bootstrap da estatística $\hat{\theta}_i^*$ com 1 ≤ i ≤ N em forma crescente e calcular a probabilidade p_0 de uma estimativa Bootstrap ser inferior à estimativa da estatística na amostra mestre ($\hat{\theta}$). Esse passo pode ser representado da seguinte forma:

$$p_0 = P\left[\hat{\theta}^*{}_i \leq \hat{\theta}\right] \quad (2)$$

A partir do valor p_0 é obtido o parâmetro correção do vício z_0 que representa a inversa da Normal no ponto p_0.

$$z_0 = \Phi^{-1}\left(p_0\right) \quad (3)$$

O próximo passo é selecionar um nível (1–α)100% de confiança para o parâmetro e determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$. É então possível obter os percentis P_I e P_S:

$$P_i = \Phi\left(2\,z_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (4)$$

$$P_S = \Phi\left(2\,z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (5)$$

O Intervalo de Confiança BCPB é calculado da seguinte maneira:

$$IC_{BCPB} = \left[\, P_{P_I}\,(\hat{\theta}_i^*)\ ;\ P_{P_S}\,(\hat{\theta}_i^*)\,\right] \quad (6)$$

O método de Correção de Vício Acelerado permite encontrar o intervalo de confiança quando assimetria estiver presente de maneira muito forte. Esse método não difere muito do BCPB sendo esta diferença o fato de o BCa possuir uma constante de aceleração “a” que ajusta o intervalo de confiança em relação à assimetria. Segundo Efron e Tibshirani (1986) nesta situação este método é mais indicado que o método BCPB.

O intervalo de Confiança BCa é obtido realizando-se os mesmo passos do cálculo do intervalo de confiança BCPB com os limites P_I e P_S, porém utilizando-se um ajuste por meio da constante de aceleração “a”. A obtenção da constante “a” envolve cálculos não triviais, o que leva o Intervalo de Confiança BCa ser mais utilizado quando há algum software estatístico disponível. O programa S-PLUS é citado em vários artigos. É possível encontrar também alguns programas livres que calculam esta constante.

O cálculo do intervalo de confiança BCa é feito através da mesma Equação (6), porém com P_I e P_S respectivamente iguais a:

$$P_I = \Phi\left(z_0 - \frac{\left(z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \right)}{1 - a\left(z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \right)} \right) \quad (7)$$

$$P_I = \Phi\left(z_0 + \frac{\left(z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \right)}{1 - a\left(z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \right)} \right) \quad (8)$$

De acordo com Andrews e Buchinsky (2002) é possível determinar a constante "a" de maneira mais simples quando as variáveis aleatórias observadas na amostra mestre forem independentes e identicamente distribuídas. Neste caso:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(i)} \right)^3}{6 \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(i)} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

, com $\hat{\theta}_{(i)}$ representando o valor das estimativas do parâmetro estudado para cada amostra "i" que consiste na amostra mestre sem a observação "i" da mesma, com $1 \le i \le n$ e $\hat{\theta}_{(.)}$ o valor da média das estimativas $\hat{\theta}_{(i)}$.

Na maioria das publicações não técnicas em estatística, a forma de cálculo dos intervalos de confiança Bootstrap não costuma ser apresentada. Segundo enquête realizada por Hall (1988), o método percentil é utilizado em mais da metade destas publicações.

O Bootstrap é muito genérico e devido a esta generalidade, há mais de um método Bootstrap como solução para um determinado problema (HESTERBERG et al., 2003).

Materiais e Métodos

Foi selecionada uma amostra casual simples de cinqüenta parafusos pertencentes a uma caixa fechada contendo 200 parafusos de um mesmo lote. Foi realizada a medição destes cinqüenta parafusos no laboratório de física da Universidade Presbiteriana Mackenzie utilizando como dispositivo de medição dimensional um paquímetro digital ajustado em milímetros, devidamente calibrado.

Para realizar a amostragem os 200 parafusos pertencentes a uma caixa foram numerados. Destes, foram sorteados cinqüenta parafusos para compor a amostra mestre. A caixa de parafusos representa a população de onde foi retirada a amostra mestre.

A partir desta amostra de cinqüenta comprimentos de parafusos, foram geradas mil reamostras de mesmo tamanho.

Resultados

A Tabela 1 apresenta a amostra mestre, algumas reamostras, a média e a variância para a amostra mestre e para as reamostras. Cada reamostra foi gerada atribuindo probabilidade igual a 1/50 para cada observação da amostra mestre e realizando a amostragem com reposição.

Tabela 1
Amostra mestre, reamostras, média e variância para a amostra mestre e reamostras

observação	amostra mestre	reamostra 1	reamostra 2	reamostra 3	... reamostra 1000
1	28,03	26,84	27,04	27,39	26,53
2	26,54	27,75	27,20	27,04	27,39
3	27,18	27,99	26,22	27,25	27,29
4	26,89	27,00	26,66	26,85	26,97
5	27,31	27,47	27,01	27,20	27,94
6	27,04	26,48	27,54	26,13	27,02
7	26,81	26,53	26,46	27,01	26,74
8	26,62	26,66	26,66	27,54	27,94
9	26,80	26,42	26,46	27,11	27,11
10	26,85	27,31	26,35	26,85	26,54
:	:	:	:	:	:
40	26,48	27,20	27,75	26,22	27,00
41	26,58	26,63	26,22	27,29	26,85
42	27,20	26,63	26,62	27,54	27,22
43	26,65	27,51	27,00	26,54	26,80
44	26,68	27,54	26,68	26,80	27,39
45	26,53	26,81	26,80	26,66	26,62
46	27,94	26,48	26,97	27,04	27,39
47	27,16	27,47	27,25	27,11	26,74
48	27,54	27,32	27,54	27,04	26,89
49	26,46	26,48	26,62	27,00	27,39
50	27,29	27,20	26,22	27,00	27,00
média	26,980	27,0343	26,8224	26,9814	27,0838
variância	0,2043	0,4801	0,4518	0,3689	0,3975

A Figura 1 apresenta o histograma das médias dos comprimentos dos parafusos nas mil reamostras Bootstrap:

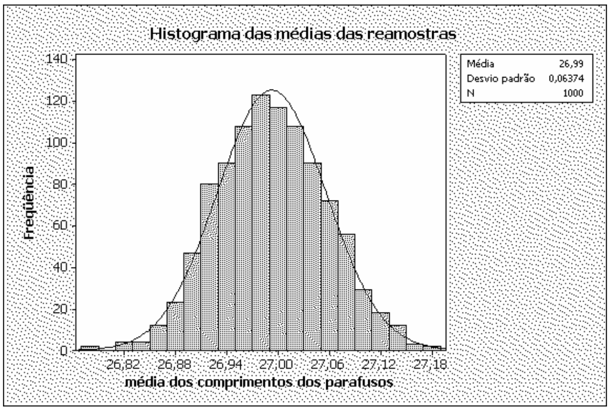

Figura1
Histograma das médias dos comprimentos dos parafusos nas mil reamostras

Pode-se notar a forma muito próxima à Normal. O teste de aderência à distribuição Normal realizado pelo método de Anderson Darling confirma esta hipótese (p = 0,156).

A média da amostra mestre encontrada foi 26,9908, sua mediana 27,0050 e sua variância 0,2043. É possível verificar a simetria dos dados que compõe a amostra mestre pela proximidade do valor da mediana e da média.

Calculando-se o intervalo de confiança Bootstrap Percentil para as médias encontrou-se [26,8770 ; 27,1178]. O intervalo de confiança Bootstrap Percentil das Diferenças encontrado foi [26,8657 ; 27,1066]. Também foi calculado o intervalo de confiança Bootstrap t igual a [26,8627 ; 27,1189].

Como a distribuição de probabilidades da média dos comprimentos dos parafusos é conhecida foi possível realizar o cálculo do intervalo de confiança paramétrico. O intervalo obtido foi [26,8610 ; 27,1206].

A média das médias nas reamostras foi igual a 26,9928. O valor do viés calculado com os dados das reamostras foi igual a 0,0020, considerado pequeno (0,0007% do valor da estatística na amostra mestre). Neste caso os métodos Bootstrap t e Bootstrap Percentil de cálculo de intervalo de confiança são adequados e resultaram em valores próximos.

Os intervalos de confiança para variância utilizando a técnica Bootstrap forneceram valores próximos, a saber: intervalo de confiança Bootstrap Percentil = [0,1313; 0,2740] e Percentil das Diferenças = [0,1296 ; 0,2723].

A média das variâncias nas reamostras foi igual a 0,1993. O valor do viés para a estimativa da variância foi igual a – 0,0050 considerado grande (2,45% valor da estatística na amostra mestre).

Neste caso é aconselhável o cálculo dos intervalos de confiança para a variância através dos métodos BCPB e BCa, os quais apresentaram respectivamente os seguintes valores [0,1426 ; 0,2887] e [0,1230 ; 0,3022]. Para obtenção do intervalo de confiança pelo método BCa o valor encontrado para a constante "a" foi igual a 0,043243.

Supondo a distribuição Quiquadrado para a variância dos comprimentos dos parafusos, foi possível calcular o intervalo de confiança paramétrico igual a [0,1425 ; 0,3172].

Discussão

Como o estatística da média tinha distribuição Normal e o vício foi relativamente pequeno, os intervalos de confiança Bootstrap pelos métodos t e Percentil coincidiram e foram adequados.

No caso da estimativa do parâmetro variância em que a estimativa pontual Bootstrap foi viciada foram utilizados os métodos BCPB e BCa. Os intervalos BCPB e BCa resultaram mais próximos do intervalo paramétrico que o intervalo Bootstrap Percentil, confirmando a melhora na estimação com o uso dos intervalos corrigidos.

Em ambos os casos a estimação pela técnica Bootstrap mais apropriada resultou bem próxima à estimação paramétrica baseada nas distribuições de probabilidades conhecidas.

Conclusão

A técnica de estimação Bootstrap é especialmente útil quando o cálculo de estimadores por métodos analíticos for complicado ou quando a distribuição de probabilidades da estatística for desconhecida.

Em uma situação onde as distribuições de probabilidades eram conhecidas, os intervalos de confiança Bootstrap coincidiram com as estimativas baseadas nestas distribuições, confirmando a confiabilidade do método para estimação de parâmetros.

Através da realização desse estudo de caso, foi possível verificar a adequação da técnica Bootstrap em situações presentes no cotidiano.

Agradecimento

As autoras agradecem o apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico para a realização desta pesquisa.

Referências

- ANDREWS, D. W. K.; BUCHINSKY, M. On the number of bootstrap repetitions for BCa confidence intervals. **Econometric Theory**. v.18, n.4, p. 962-984, Aug. 2002.

- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy, **Statistical Science.** v.1, n.1, p. 55–77, 1986.

- HALL, P. Theorical comparison of bootstrap confidence intervals, **The Annals of Statistics.** v.16, n.3, p. 987–953, 1988.

- HESTERBERG, T.; MOORE, D. S.; MONAGHAN, S.; CLIPSON, A.; EPSTEIN, R. Bootstrap methods and permutation tests, In: **The practice of business statistics.** New York: W. H. Freeman, 2003.

- GONZÁLEZ MANTEIGA, W.; PRADA SÁNCHEZ, J. M.; ROMO URROZ, J. J.The Bootstrap – a review. **Computational Statistics.** v.9, n.1, p. 165-205, 1994.

- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER G. C.; **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.** 2. ed. Rio de Janeiro:LTC, 2003.