

INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA: UMA ABORDAGEM PARA AS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

Marta Maria Mauricio Macena¹, Iran Abreu Mendes²

¹⁻² Universidade Federal do Rio Grande do Norte/Centro de Ciências Exatas e da Terra/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

¹marta@cefetpb.edu.br, ²iamendes@digizap.com.br.

Resumo: Este trabalho trata de um estudo realizado sobre a possibilidade de uso da investigação em sala de aula em conexão com a história da matemática e objetivando conduzir o aprendiz para uma aprendizagem significativa. Tomamos como tópico matemático específico as secções cônicas e investigamos a elipse, a hipérbole e a parábola dentro de um conteúdo próprio para alunos da terceira série do ensino médio. O estudo desenvolveu-se no Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba – CEFET/PB evidenciando a importância de despertar a curiosidade e instaurar conflitos cognitivos para a busca de conhecimentos pelo aluno.

Palavras-chave: investigação em sala de aula, aprendizagem com significado, história da matemática e secções cônicas.

Área do Conhecimento: Ciências Humanas

Introdução

A docência no ensino médio desde agosto de 1982 nos fez sentir a carência de um ensino e de uma aprendizagem com significado. Ausubel considera que, nesse processo, “uma nova informação é relacionada a um aspecto relevante, já existente, da estrutura de conhecimento de um indivíduo” (*apud* NOVAK, 1981, p. 56) e o professor, consciente de sua tarefa como mediador, deve provocar o aprendiz no sentido de trazer à tona elementos que possam ser relevantes à aquisição do novo conhecimento. Tais elementos são os conhecimentos prévios.

Contraopondo-se a aprendizagem com significado temos a aprendizagem memorística ou mecânica (MOREIRA, 1982; ONTORIA, 2004). E, mesmo que “a maioria das informações aprendida mecanicamente nas escolas [seja] perdida dentro de seis a oito semanas [...] [precisamos] reconhecer que mecânica → significativa é um continuum e não uma dicotomia” (NOVAK, 1981, p. 66 e p. 62).

Sendo o significado um importante fator para a aprendizagem, necessitamos de metodologias de ensino e de aprendizagem que levem de forma eficiente e eficaz a apreensão de um novo conhecimento. A presente pesquisa analisa a possibilidade de uso de uma abordagem metodológica diversificada para o ensino e a aprendizagem de geometria analítica, particularizando, no estudo das secções cônicas, a elipse, a hipérbole e a parábola. Em tal pesquisa desenvolvemos uma investigação em sala de aula, com atividades matemáticas provocadoras, tencionando instaurar conflitos, insatisfações, curiosidades e dúvidas no meio do grupo

pesquisado (alunos da 3ª série do ensino médio no CEFET/PB).

Atividades manipulativas estruturadas, investigação de alguns problemas do cotidiano, atividades em laboratório, e principalmente a busca cuidadosa da trajetória histórica dos conceitos matemáticos (MENDES, 2001) conduziram a nossa pesquisa. A investigação ganha significado quando desperta no aprendiz o desejo de *bisbilhotar* (PONTE ET AL, 2003).

Método

No Brasil, essa discussão sobre a educação matemática ocorreu a partir de Euclides Roxo (1890-1950) que defendia, em oposição ao ensino tradicional, as tendências presentes na Europa e nos Estados Unidos (DASSIE, 2001; MIGUEL e MIORIM, 2005; VALENTE, 2005). As idéias reformistas de Felix Klein (1849-1925), implantadas na Alemanha, e os movimentos internacionais de renovação no ensino de matemática, foram o impulso para Euclides.

Klein teve um interesse profundo por questões pedagógicas (ALEKSANDROV, 1994; EVES, 2004), pois “além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos” (BOYER, 1994, p. 401).

Aulas expositivas favorecem a aprendizagem memorística, a passividade do aluno e a *culpar* o aprendiz pelo seu fracasso. Mas, apesar de o modelo tradicional ser unanimemente combatido por especialistas e investigadores da educação, “é preciso não esquecer que o chamado ensino tradicional constitui um modelo coerente que engloba todos os aspectos da aprendizagem das Ciências, motivo pelo qual sua transformação

exige tanto um conhecimento claro e preciso de suas deficiências como a elaboração de um modelo alternativo igualmente coerente e de maior eficácia geral". (GIL-PÉREZ, 2001, p. 31)

As bases teóricas, que apóiam as atividades desenvolvidas junto com os alunos durante a realização de uma investigação em sala de aula em conexão com a história da matemática e conduzindo o aprendiz para uma aprendizagem significativa, foram determinadas.

A busca do fundamento teórico nos fez perceber, com satisfação, que o nosso cotidiano docente assemelha-se em alguns pontos, de forma não sistematizada, a uma investigação em sala de aula. Isto pode ocorrer com outros educadores que por desconhecerem as várias tendências deixam de sistematizar a sua prática pedagógica.

Nossa referência inicial esteve ligada a Pedro da Ponte et al (2003), exatamente pelo título de sua obra, *Investigações Matemáticas em Sala de Aula*. Com a continuidade da pesquisa bibliográfica percebemos detalhes nas características de outras tendências de ensino da matemática (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Etnomatemática, Pesquisa Dirigida, Mudança Conceitual e História da Matemática) que serviram para entremear a Investigação em Sala de Aula.

Considerando a urgência de repensar o significado da ação avaliativa na educação, tomamos tal assunto como um tópico em nossa pesquisa já que "quaisquer práticas inovadoras desenvolver-se-ão em falso se não alicerçadas por uma reflexão profunda sobre concepções de avaliação/educação" (HOFFMANN 2004, p. 10). Talvez "a avaliação seja um dos aspectos do processo ensino/aprendizagem, em que mais se faça necessária uma mudança didática" (GIL-PÉREZ, 2001, p. 43).

Mesmo que um aluno da 3ª série do ensino médio já disponha de uma boa porção de elementos no seu estoque de conhecimento, pode ser que ali não exista um aspecto relevante com o qual relacionar a nova informação que pretendemos ensinar. Então, os primeiros momentos investigativos devem favorecer o despertar desses conhecimentos prévios onde a nova informação possa ancorar. O almejado *querer saber* do aluno será muito bem-vindo.

Um aluno intrigado com a situação-problema, não convencido da regularidade de alguns dados, curioso e ansioso para chegar às conclusões finais, é um elemento de primordial importância numa investigação em sala de aula.

Ponte et al (2003, p. 21) considera quatro momentos na realização de uma investigação:

1. Exploração e formulação de questões

- Reconhecer uma situação problemática
- Explorar a situação problemática
- Formular questões

2. Conjecturas

- Organizar dados
- Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)

3. Testes e reformulação

- Realizar testes
- Refinar uma conjectura

4. Justificação e avaliação

- Justificar uma conjectura
- Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Tomando como base tais momentos, segue-se o resumo de nossos passos nessa investigação:

1. Exploração e formulação de questões

- Despertar no aprendiz conhecimentos prévios relevantes ao estudo investigado.
- Reconhecer a situação-problema.
- Familiarizar-se com a situação-problema.
- Formular questões referentes à situação problema (não fizeram bem).

2. Organização de dados

- Organizar os dados obtidos na atividade.
- Formular conjecturas com base nos dados obtidos (hipóteses).

3. Testes e reformulação

- Testar a conjectura mais provável.
- Eventualmente, reformular a conjectura para nova testagem.

4. Justificação, exposição e conclusão.

- Justificar uma conjectura de consenso no grupo.
- Expor aos colegas de outros grupos o resultado obtido.
- Construir o resultado final em consenso com todos os grupos.

5. Avaliação

- Preenchimento das guias de atividades.
- Exposição dos resultados do grupo, em cada etapa do trabalho, para toda classe.
- Procedimentos desenvolvidos durante as atividades em grupo.
- Análise de exercícios individuais.

Dessa forma, mas nem sempre nessa ordem, "o processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás. Essa perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absolutas" (PONTE ET AL, 2003, p. 15).

Para que o aluno tenha noção do quanto esse movimento oscilatório esteve presente também na remota origem do conteúdo pesquisado, contamos com a necessária contribuição da história da matemática. Investigando os fundamentos desse conteúdo é possível ampliarmos a compreensão dos conceitos. Assim, planejamos uma exposição em PowerPoint e um texto histórico (MACENA e

MENDES, 2004) sobre a origem das secções cônicas.

Na formulação das questões e organização dos dados percebemos que há resistência, por parte dos alunos, em escrever. Limitam-se à linguagem oral e/ou gestual. Não é tarefa fácil fazê-los perceber que é imprescindível o registro das questões e dos resultados obtidos. Quanto às conjecturas, querem apenas registrar a eleita por eles como verdadeira. As falsas conjecturas ficam propensas a serem descartadas.

Atentando aos resultados parciais da pesquisa vivenciada no ano letivo de 2004 (MACENA e MENDES, 2005) trabalhamos com nove alunos voluntários distribuídos em três equipes. Eles concluíam o ensino médio no turno matutino e contribuíaam conosco no vespertino. A eles nossa gratidão.

Além do preenchimento das folhas de atividades, fomos cuidadosos em registrar as imagens e as falas do grupo pesquisado.

Vejam os a distinção entre problema e exercício feita pelos alunos:

1. Equipe X: *Problema exige o desenvolvimento de métodos, enquanto no exercício é exigido apenas a aplicação de um método já estabelecido.*
2. Equipe Y: *Exercício é o método de praticar o conhecimento enquanto o problema é a tentativa de resolver o desconhecido, ou seja, formular um método para resolvê-lo.*
3. Equipe Z: *Para a resolução do problema, é necessário desenvolver o método de resolução, enquanto no exercício é utilizado um método já estabelecido.*

Orgulhosos, eles compararam as diferenças e as semelhanças com as seguintes citações:

1. “[...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução [...] a distinção entre exercícios e problemas como algo relacionado com o contexto da tarefa e com o aluno que a enfrenta [...]” (POZO, 1998, p. 16).
2. “Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. [...]” (PONTE ET AL, 2003, p. 22).

Foi necessário também deixar claro o significado de uma investigação em sala de aula.

3. Numa investigação [...] Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, [...] quem investiga tem papel fundamental na sua definição. [...] os pontos de partida [e] [...] os pontos de chegada podem ser [...] diferentes (PONTE ET AL, 2003, p. 23).

Após uma aula expositiva sobre *ponto* e *reta*, conhecimento necessário e indispensável ao estudo das secções cônicas, os alunos foram

conduzidos aos tabuleiros de bilhar cônicos a fim de, ludicamente, descobrirem as regras do jogo que o fariam ao atender a solicitação: **“Por tabela, retirar a bola fixa no ponto determinado”**.

Esse é um momento em que a algazarra é inevitável, mas quanto a isso Fossa (2001, p. 13) nos diz “que o aluno é quem é a estrela. Trabalhando em pequenos grupos com colegas, o aluno está ativamente engajado no desenvolvimento de alguma tarefa. Com tantos alunos conversando e com muito mais movimento na sala de aula [...], parece que a aula virou bagunça! Mas, é só na aparência”.

Nessa fase tivemos o cuidado de não mencionar nenhum elemento ou nome das curvas, mas percebemos, na linguagem matemática utilizada pelos alunos, que eles já detinham alguns conhecimentos prévios sobre as secções cônicas.

Cada equipe escreveu sua regra em papel ofício duplo para ser exposta. Assim, todos tiveram a oportunidade de conhecer a produção dos seus companheiros. Visualizando tais anotações eles defenderam as suas idéias, exigiram a explicação de algumas idéias de seus colegas e concordaram com outras. Ficamos atentos, pois no momento necessário iríamos intervir para conduzi-los ao processo de mudança conceitual.

Finalmente chegaram ao seguinte consenso:
TABULEIRO A (parábola) → *Jogando a bola paralelamente à lateral maior do tabuleiro, ela passará pelo foco.*

TABULEIRO B (elipse) → *Se ambas as bolas estiverem posicionada nos focos, independentemente da direção em que uma das bolas seja lançada, ela incidirá sobre o outro foco. Caso a bola que será arremessada, esteja posicionada fora do foco, devemos lançá-la em uma trajetória que passe pelo foco oposto ao foco que contém a bola a ser atingida.*

TABULEIRO C (hipérbole) → *A bola deve ser lançada numa trajetória que coincida com a reta que passa pela bola e pelo pino, ou seja, em direção ao pino.*

Na aula seguinte, de acordo com as instruções do guia de atividades, os alunos discutiram entre si a melhor maneira de esboçar lugares geométricos cônicos num papel quadriculado e registraram as questões e hipóteses que surgiram nessa discussão. Depois idealizaram uma definição para cada um desses lugares. Continuando as discussões no grupo maior melhoraram as suas definições que ficaram assim:

1. **Elipse** é um lugar geométrico cuja soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é igual à distância das extremidades, sendo $2a > 2c$.
2. **Parábola** é um lugar geométrico cujos pontos estão compreendidos a uma mesma distância de uma reta inicial (diretriz) e um ponto da curva
3. **Hipérbole** é uma figura geométrica cuja diferença entre as distâncias de um ponto da

curva aos focos é sempre igual à diferença das distâncias de qualquer outro ponto da curva aos focos.

Após a consulta de alguns livros didáticos, tais definições foram retificadas. Esses lugares geométricos também foram traçados em quadros com superfície perfurada, usando cordões, pregos, esquadros e réguas. O método do jardineiro usado para traçar a elipse foi descrito por Antemius de Trales que morreu em 534 e, o método de Kepler usando cordel e régua T para traçar uma parábola se atribui a Isodoro de Mileto, que viveu em 520. A partir daí os elementos de cada curva foram destacados e os alunos foram induzidos a encontrar a equação geral para cada uma delas.

Duas avaliações individuais com enunciados descritos a seguir foram realizadas:

1. Para cada uma das cônicas representadas abaixo (havia a representação de três curvas cônicas com eixos paralelos aos eixos cartesianos), determine os seus elementos principais e escreva a sua equação reduzida.
2. Considerando um ponto genérico pertencente a cada curva abaixo representada (o esboço de cada gráfico constava impresso),
 - a) obter a equação da elipse de focos $F_1(-2, -2)$ e $F_2(2, 2)$, cujo eixo menor mede 2.
 - b) obter a equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 2)$ e $F_2(2, -2)$, cujo eixo imaginário mede $2\sqrt{7}$.
 - c) encontrar a equação da parábola de focos $F(2, 1)$, cuja diretriz é $r: x + y - 2 = 0$.

O resultado dessa parte da avaliação deu-se da seguinte maneira:

1. um aprendiz acertou 100% (não teve pressa);
2. dois aprendizes cometeram erros por descuido
3. cinco aprendizes cometeram erros na racionalização;
4. um aprendiz, cuja frequência às aulas foi de 100%, mostrou-se com sérias dificuldades na resolução das questões.

Referências

- ALEKSANDROV, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev e outros. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editoria S.A., 1994.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. S. Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1994.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- FOSSA, John A. **Ensaio sobre a educação matemática**. Belém: EDUEPA, 2001.
- GIL-PÉREZ, Daniel e CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. **Formação de professores de ciências**: tendências e inovações. Tradução Sandra Valenzuela. S. Paulo: Cortez, 2001.
- HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. **Avaliação: mito e desafio: uma perspectiva construtivista**. Porto Alegre: Mediação, 2004.
- MACENA, Marta e MENDES, Iran. Notas históricas sobre as Secções Cônicas na investigação de sala de aula. In Anais do **VI Seminário Nacional de História da Matemática**. Rio Claro: L.A.S., 2005.
- MACENA, Marta e MENDES, Iran. História da matemática e investigação em sala de aula: uma abordagem significativa para as secções cônicas. In Anais do **1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática**. S. Paulo: IME-USP, 2005.
- MENDES, Iran Abreu. **Ensino da Matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática. 283 p. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.
- MIGUEL, Antônio e MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- MOREIRA, Marco Antônio e MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. S. Paulo: Moraes, 1982.
- NOVAK, Joseph Donald. **Uma teoria de Educação**. Tradução Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.
- ONTORIA PEÑA, Antonio, GÓMEZ, Juan Pedro e MOLINA RUBIO, Ana. **Potencializar a capacidade de aprender e pensar**: o que mudar para aprender e como aprender para mudar. Tradução Fuvio Lulsisco. S. Paulo: Madras, 2004.
- PONTE, João Pedro da, BROCARD, Joana e OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.
- VALENTE, Wagner Rodrigues. História. **Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil**. In UNIÓN Revista Iberoamericana de Educação Matemática. Marzo de 2005, pp 89-94. Disponível em: <http://www.fisem.org/descargas/1/Union_001_012.pdf>. Acesso em 11 abr. 2006