MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS ACOPLADAS

Rafael Luiz de Oliveira Gomes[1], Marcio Magini[2]

1 – Faculdade de Ciência da Computação
2 – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento
e-mail[2]: magini@univap.br
Universidade do Vale do Paraíba, Av. Shishima Hifumi, 2911, Urbanova
São José dos Campos, S.P., 12244-000.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Acoplamento, Oscilação, Iteração.
Área do Conhecimento: I – Ciências Exatas e da Terra

Resumo – Equações diferenciais acopladas se mostram de grande valia para as diversas aplicações, principalmente na área de modelamento. Como estudo inicial foi implementado um conjunto de métodos numéricos de análise. Nestes métodos foram estudados desde processos iterativos até a implementação de métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias. Em um caráter mais científico o presente trabalho se focaliza nas equações diferenciais acopladas e seus métodos de solução e o estudo do espaço de fase. As equações diferenciais foram resolvidas usando o método de Euler aperfeiçoado e Runge-Kutta de quarta ordem.

Introdução

Os Métodos Numéricos são extremamente importantes para a obtenção de resultados em problemas matemáticos. Ainda mais que, atualmente os problemas ganharam uma complexidade que torna o problema intratável analiticamente. Esses problemas matemáticos podem representar situações da vida real, por isso o Cálculo Numérico [1,2] tornou-se imprescindível, principalmente em Engenharia. Problemas de modelamento de sistemas físicos embutidos no contexto de engenharia, se beneficiam de forma ímpar das técnicas numéricas. Essas técnicas vão desde simples sistemas de iteração de funções indo até a solução de sistemas de equações diferenciais, mais especificamente, EDO's(equações diferenciais ordinárias). Na verdade os processos numéricos por si só, são inviáveis de se manipular se não for usado um sistema computacional adequado. Esse sistema que engloba desde um hardware com uma capacidade mínima de processamento, como também uma linguagem adequada para trabalhar muitas vezes com números de ordem muito pequena, é o ponto crucial do desenvolvimento de pesquisas nesta área.

Metodologia

O intuito deste projeto é criar uma plataforma, baseada em métodos numéricos, para resolver sistemas de equações diferenciais. Para tanto é necessário criar e estudar como a linguagem escolhida se comporta numericamente. O aprendizado de alguns métodos numéricos, a realização de testes e análise de resultados fazem parte deste escopo.

Assim como as EDO's, os sistemas de EDO's acopladas podem ser resolvidos numericamente. Para a resolução desses sistemas foi desenvolvido, a partir do método de Euler Aperfeiçoado, um método capaz de realizar esses cálculos. Na verdade outros métodos poderiam ser utilizados com o mesmo sucesso no que diz respeito à convergência porém o método de Euler aperfeiçoado se mostra eficaz. De acordo com o método de Euler Aperfeiçoado para equações de 2ª ordem:

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n + hz_n + \frac{h}{2}k1 \\ z_n + \frac{1}{2}(k1 + k2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sendo que, } \begin{cases} k1 = hf(x_n, y_n, z_n) \\ k2 = hf(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + k1) \end{cases}$$

Onde *z*, é a derivada segunda de y.

Logo, se trocarmos de variáveis, chamando y de u:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n + hz_n + \frac{h}{2}k1 \\ z_n + \frac{1}{2}(k1 + k2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sendo que, } \begin{cases} k1 = hf(x_n, u_n, z_n) \\ k2 = hf(x_n + h, u_n + hz_n, z_n + k1) \end{cases}$$

Trocando agora, z por v:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n + hv_n + \frac{h}{2}k1 \\ v_n + \frac{1}{2}(k1 + k2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k1 = hf(x_n, u_n, v_n) \\ k2 = hf(x_n + h, u_n + hv_n, v_n + k1) \end{cases}$$

Logo, o Método fica:

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n + hz_n + \frac{h}{2}k1_y \\ z_n + \frac{1}{2}(k1_y + k2_y) \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n + hv_n + \frac{h}{2}k1_u \\ v_n + \frac{1}{2}(k1_u + k2_u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k1_y = hf(x_n, y_n, z_n, u_n, v_n) \\ k2_y = hf(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + k1_y, u_n + hv_n, v_n + k1_u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k1_u = hf(x_n, y_n, z_n, u_n, v_n) \\ k2_u = hf(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + k1_y, u_n + hv_n, v_n + k1_u) \end{cases}$$

Onde, *k1* e *k2* devem ser calculados separadamente, tanto para *y*, quanto para *u*.

Resultados

Nesta seção serão apresentados dois exemplos de equações diferenciais acopladas utilizando o método de Euler descrito anteriormente para sua solução.

Dado o Problema de Valor Inicial(PVI) abaixo, resolvê-lo numericamente.

$$\begin{cases} y'' = -2 * y + u \\ y_0 = 1.0 \\ y'_0 = 0.1 \\ u'' = y - u \\ u_0 = 0.2 \\ u'_0 = -0.3 \end{cases}$$

Para essa resolução numérica, foi desenvolvido um código-fonte em Fortran [3].

```
      integer*4 function acoplada(h,y,z,u,v,x0,xf)
      implicit real*4(a-h,o-z)
      xaux=x0
      do 30 while (x0<xf)
          write(630,*)x0,y
          write(640,*)x0,u
          write(650,*)y,u
          write(660,*)y,z
          write(670,*)u,v
          x0=xaux+h
          xaux=x0
          yaux=y
          uaux=u
          func= calcfunc1(y,u,x0)
          aky1=h*(func)
          y=(yaux+h*z)
          u=(uaux+h*v)
          x0=xaux+h
          func= calcfunc1(y,u,x0)
          aky2=h*(func)
          y=yaux
          u=uaux
          x0=xaux
          func= calcfunc2(y,u,x0)
          aku1=h*(func)
          y=(yaux+h*z)
          u=(uaux+h*v)
          x0=xaux+h
          func= calcfunc2(y,u,x0)
          aku2=h*(func)
          y=yaux+h*z+(h/2.d0)*aky1
          z=z+(1.d0/2.d0)*(aky1+aky2)
          u=uaux+h*v+(h/2.d0)*aku1
          v=v+(1.d0/2.d0)*(aku1+aku2)
          x0=xaux
30    end do
      acoplada=1
      end function
```

Figura 1- Resolução Numérica em Fortran

Para o Cálculo do valor da função no ponto, foram desenvolvidas essas duas funções também em Fortran.

```
real*8 function calcfunc1(y,u,x)
implicit real*4(a-h,o-z)
    calcfunc1 = -2*y+u
end function

real*8 function calcfunc2(y,u,x)
implicit real*4(a-h,o-z)
    calcfunc2 = y-u
end function
```

Figura 2- Valor da Função no Ponto

A oscilação causada pelo acoplamento entre as duas equações pode ser percebida através do gráfico de y e u em relação ao tempo. Para essa resolução foi considerado o passo h=0.03.

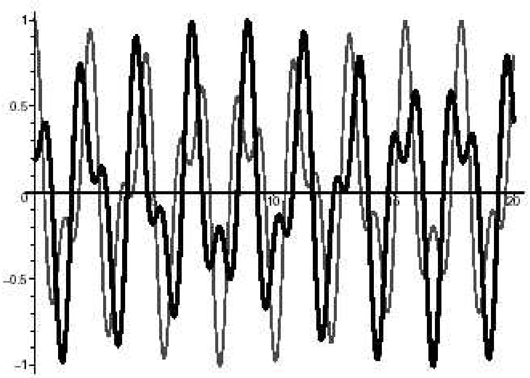

Figura 3-Gráfico de y e u em relação ao tempo.

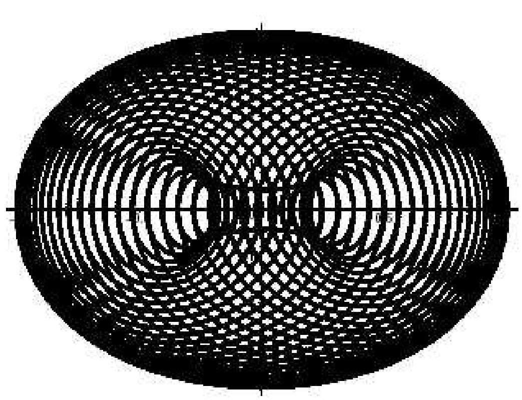

Figura 4- Gráfico de y em relação a z.

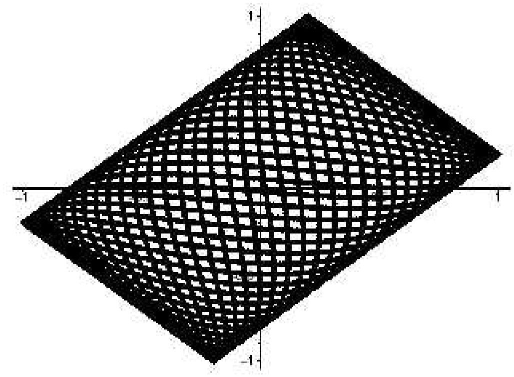

Figura 5- Gráfico de y em relação a u.

O comportamento de um PVI pode variar, de acordo com os valores iniciais e/ou valores das constantes, conforme é apresentado no exemplo 2.

Exemplo 2

Usando o passo h=0.03, resolva numericamente os PVI's abaixo.

PVI 1:

$$\begin{cases} y'' = (c_2 * y) - (c_1 + c_2) * u \\ u'' = (c_2 * u) - (c_1 + c_2) * y \\ c_1 = 80 \quad c_2 = 5 \\ y_0 = 2.0 \quad z_0 = 0.03 \\ u_0 = 0.4 \quad v_0 = 1.1 \end{cases}$$

PVI 2:

$$\begin{cases} y'' = (c_2 * y) - (c_1 + c_2) * u \\ u'' = (c_2 * u) - (c_1 + c_2) * y \\ c_1 = 35 \quad c_2 = 20 \\ y_0 = 2.0 \quad z_0 = 0.03 \\ u_0 = 0.4 \quad v_0 = 1.1 \end{cases}$$

Para a resolução numérica dos PVI's, foi utilizado o mesmo código em Fortran do Exemplo anterior, a única alteração é no cálculo do valor da função no ponto.

```
real*8 function calcfunc1(y,u,x)
implicit real*4(a-h,o-z)
     c1=80
     c2=5
     calcfunc1 = (c2*u)-(c1+c2)*y
end function

real*8 function calcfunc2(y,u,x)
implicit real*4(a-h,o-z)
     c1=80
     c2=5
     calcfunc2 = (c2*y)-(c1+c2)*u
end function
```

Figura 6- Valor da Função no Ponto (PVI 1)

Já para o PVI 2, a única alteração no código da Figura 6, foi para os valores de c1 e c2.

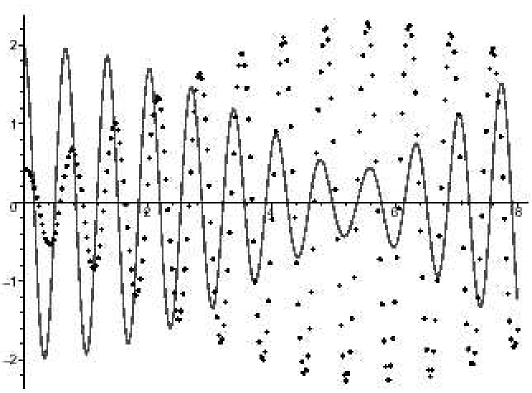

Figura 7- Gráfico de y e u em relação ao tempo (PVI 1), onde c1 = 80 e c2 = 5.

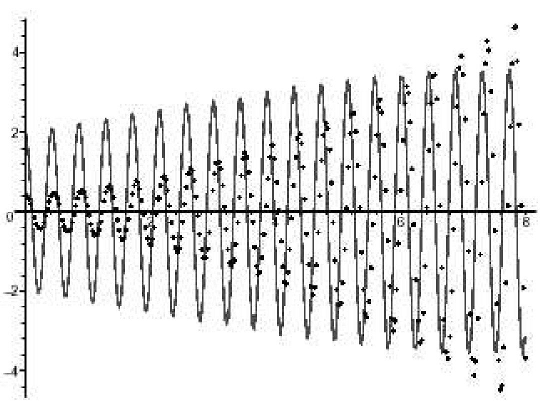

Figura 8- Gráfico de y e u em relação ao tempo (PVI 2), onde c1 = 35 e c2 = 20.

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo implementar e estudar métodos numéricos para a solução de equações diferenciais acopladas[4]. Essas equações podem ser usadas como base para a construção de modelos em processamento de sinais de um modo geral. Do mesmo modo como as equações diferenciais ordinárias podem ser acopladas, sistemas biológicos , como o de uma rede neural, também são acoplados. Então, uma oscilação em um neurônio, acarreta em vibrações em todos os neurônios que estejam interligados a ele.

O desenvolvimento de métodos numéricos para a solução de sistemas deste tipo, pode ajudar muito no avanço de pesquisas da área.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq).

Referências

[1] - Marcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lucia da Rocha Lopes, Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais MAKRON Books, 2ª Edição, 1996 . São Paulo, Brasil.

[2] - Peter A. Stark - Tradução João Bosco Pitombeira de Carvalho, Introdução aos Métodos Numéricos, Interciência, 1ª Edição, 1979. Rio de Janeiro, Brasil.

[3] - Donaldo De Souza Dias, Alfredo José Pereira Lucena e Fernando Luiz Faria Lima Programação fortran para estudantes de ciências e engenharia, Ltc, 2ª Edição, 1979. Rio de Janeiro, Brasil.

[4] Marcio Magini and Pradip K. Biswas, Numerical Symmetry Relations in a Coupled Network, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, to appear.