# ABORDAGENS DOS DADOS HISTÓRICOS E PRINCÍPIOS DO CÁLCULO VARIACIONAL

***Wagner Luiz Pelegrini [1], Emiliana Bastos de Amorim [2] e Luiz Carlos de Queiroz [3]***

[1]Aluno Especial do Programa de Mestrado em Engenharia Química. E-mail: wagner@maxioncr.com.br
[2]Mestranda em Engenharia Química. E-mail: emili.ana@pop.com.br
[3]Professor Orientador, DEQUI – Departamento de Engenharia Química, FAENQUIL – Faculdade de Engenharia Química de Lorena.
Rodovia Itajubá-Lorena, km 74,5 – Caixa Postal 116 – CEP: 12600-970 – Lorena – SP – Brasil
E-mail: queiroz@dequi.faenquil.br

**Palavras-chave:** Cálculo variacional, otimização, funcional, física matemática
**Área do Conhecimento:** Ciências Exatas e da Terra

**Resumo-** Neste trabalho, é feita uma abordagem histórica do Cálculo Variacional, e também, são apresentadas noções teóricas do mesmo e algumas de suas aplicações, principalmente em problemas físicos. São vistas como as idéias do Cálculo Variacional são antigas e como ele foi adquirindo seu rigor matemático ao longo do tempo. Apresentam-se de maneira simples a teoria que o mesmo se baseia, bem como a idéia de funcional e as condições de otimização para as soluções de problemas que envolvem princípios de minimização ou maximização de funcionais. Mostra-se como o Cálculo Variacional pode ser utilizado para explicar fenômenos naturais, tais como, o crescimento de um cipó em torno de um tronco de árvore cilíndrico.

## Introdução

O Cálculo Variacional tem sido uma ferramenta básica no estudo de vários problemas matemáticos e das mais variadas áreas do conhecimento como: Física-Matemática, Engenharia, Física Moderna, Matemática, entre outras. As idéias precursoras do cálculo variacional são antigas.

Hoje com o uso de formulações variacionais para as leis da Física, torna-se possível concentrar em um único funcional todos os aspectos intrínsecos do problema em questão. Formulações Variacionais podem servir não apenas para unificar diversos campos, mas também para sugerir novas teorias e fornecer maneiras poderosas de estudar a existência e solução de diversas equações diferenciais parciais.

A diferença entre os cálculos diferencial e variacional é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados (otimizados). Enquanto o cálculo diferencial procura números com propriedades otimizadoras, o cálculo variacional procura encontrar funções com propriedades otimizadoras.

Neste trabalho, é feita uma abordagem histórica do Cálculo Variacional, e também, são apresentadas noções teóricas do mesmo e algumas de suas aplicações.

## Abordagem Histórica do Cálculo Variacional

Desde a Antigüidade foram formulados problemas envolvendo otimização. Foram encontrados vestígios na Grécia e no Egito. A obra que dá uma idéia disso é Eneida, de Virgílio, que viveu em 70 a.C., estudou Filosofia, Medicina e Física. Em sua obra encontra-se a seguinte citação: “Dido, uma fenícia, persuadiu um chefe africano a dar-lhe tanta terra quanto ela pudesse cercar com o couro de um touro”. Primeiro ela cortou o couro em centenas de tiras bem finas. Depois uniu-as, e traçou um semi - círculo no chão, a beira do mar Mediterrâneo. Era a máxima área costeira que ela poderia envolver. Neste lugar ela construiu a cidade de Cartago. Mesmo sendo literário, o relato demostra que os povos da antigüidade possuíam conhecimentos a respeito de áreas e comprimentos otimizados. Sabiam que, dentre as figuras de igual perímetro, o círculo é aquela com maior área. Acredita-se que chegaram a estas conclusões a partir de cálculos de tentativa e erro. E assim foi até o século XVII, [1].

Fermat também resolveu um problema que acabou levando o seu nome, ficando conhecido como “Principio de Fermat”. Sneel e Descartes, em 1630, concluíram experimentalmente que quando a luz reflete em um espelho, o ângulo de reflexão é igual ao de incidência, conforme equação 1. E na refração da luz, proveniente do meio 1 (velocidade $V_1$) para um meio 2 (velocidade $V_2$), o seno do ângulo de incidência dividido pelo seno do ângulo de refração é uma constante igual ao quociente $V_1/V_2$, conforme equação 2.

$$i = r \qquad (1)$$

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, \gamma} = \frac{V_1}{V_2} \qquad (2)$$

Muitos matemáticos daquela época queriam saber o que levava a essas leis, então, Fermat sugeriu se não seria, essas manifestações da natureza, resultados de uma busca de mínimos e máximos.

Isaac Newton, também se ocupava com problemas envolvendo princípios de otimização. Ele queria saber qual era a forma de um túnel que liga dois pontos na superfície da Terra, de modo que permita a um corpo de massa *m* deslocar-se entre os dois pontos no menor tempo, [2].

Obteve como resposta a hipociclóide, que é a trajetória descrita por um ponto fixo *P* pertencente a um círculo de raio *r,* que rola no interior de outro círculo raio *R* (*R* > *r*), conforme mostra a Figura 1.

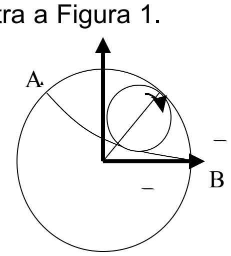
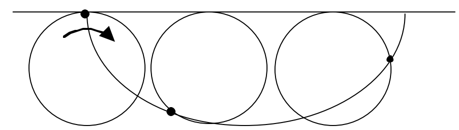



FIGURA 1 – Hipociclóide.

Huygens ao estudar o movimento pendular, formulou o problema de Tautochrone (Tauto = mesmo e Chrone = tempo), ou seja, mesmo tempo: “qual é a curva que permite a um corpo, independente da sua posição inicial A, deslizar sob a ação da gravidade g e chegar a certo ponto B, fixo, sempre no mesmo intervalo de tempo *T*?”. Huygens descobriu que tal curva era a

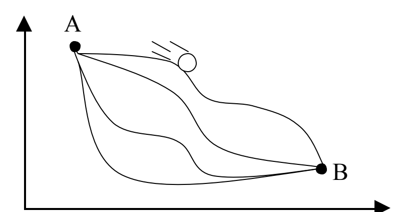


ciclóide, que é a curva descrita por um ponto fixo em uma circunferência ao deslizar em uma reta, conforme, ilustra a Figura 2.

FIGURA 2 – Ciclóide.

Bernoulli também obteve como resposta a ciclóide, para um problema clássico do Cálculo Variacional. O problema era o seguinte:

“... Um corpo, sob ação da gravidade, desliza ao longo de uma curva lisa. Qual deverá ser sua forma para que o tempo de deslocamento entre os dois pontos fixos, A e




B, ligados pela curva seja mínimo?”, sendo uma interpretação esquemática dada na Figura 3.

FIGURA 3 – Esquema do problema.

Este problema é conhecido por Braquistócrona (menor tempo) esse resultado também foi obtido por outros matemáticos.

Outro problema que também preocupava os matemáticos era encontrar sólidos de revolução com área lateral mínima, o qual poderia resolver problemas relacionados à transferência de calor, resistência à deformação e economia de materiais.

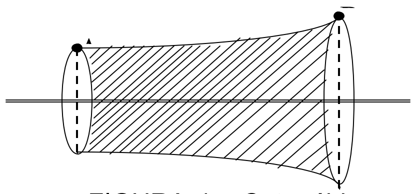


FIGURA 4 – Catenóide.

O catenóide é a resposta desse problema, que é obtido graficamente quando se gira um segmento da catenária em torno do eixo x, conforme é ilustrado na Figura 4. O nome catenária foi dado por Leibniz, que o extraiu da palavra latina *catena,* que significa corrente.

Sophie Germain, enunciou o seguinte problema: "... qual é a curva que liga dois pontos fixos A e B pertencentes à superfície de um cilindro na menor distância?", conforme ilustra a Figura 5.

FIGURA 5 – Cipó.

A solução desse problema é dada naturalmente pelo cipó.

Bernoulli chamou a atenção dos matemáticos para os problemas cuja solução são curvas. Euler faz citações do Cálculo Variacional em alguns artigos, especificamente nos seus estudos sobre Equações Diferenciais. Lagrange criou o operador variacional ($\delta$). Legendre criou critérios para distinguir as funções que maximizam das que minimizam. Jacobi reformulou os resultados de Legendre. E, por volta de 1900, Volterra e Hilbert introduziram a definição rigorosa de funcional, [3].

**Princípios do Cálculo Variacional**

O Cálculo Variacional é alicerçado no conceito de funcional.

Definição: Funcional é a transformação F que a cada elemento y(x) de um conjunto S associa um único escalar real F(y).

**Condições de Otimização**

É a condição que deve ser aplicada ao funcional, depois de identificado o seu tipo, para que se possa encontrar a função otimizadora. Para cada funcional tem-se uma condição de otimização:

$$I = \int_A^B f(x, y, y')\,dx \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

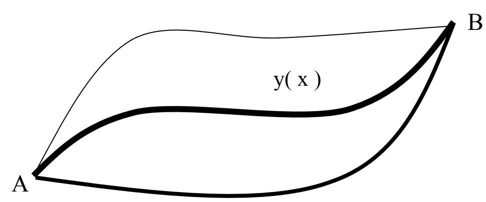
$$I = \int_A^B f(x, y')\,dx \Rightarrow y'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - f = c^{te}$$

$$I = \int_A^B f(y, y')\,dx \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = c^{te}$$

$$I = \int_A^B f(y')\,dx \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = c^{te}$$

**Aplicação**

Qual é a curva y(x) que liga dois pontos A e B pertencentes a um plano $\alpha$ na menor distância?




Solução: O comprimento de uma curva representada pela função y(x) é dado pelo funcional do comprimento:

$$c = \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

Identificando o caso correspondente do funcional obtém-se a seguinte Condição de Otimização:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c^{te}$$

Substituindo:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(1 + y'^2\right)^{1/2} = k \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} 2y' = k$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ \frac{dx}{d\theta} = -R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$$y' = \sqrt{\frac{k^2}{1 - k^2}}$$

Isolando y', temos:

O segundo membro é constante será feito igual a ***a.***

Obtém-se assim a seguinte equação diferencial:

Logo:

y = ax + b. Que é a equação de uma reta.

2) Qual é a curva que liga dois pontos A e B pertencentes à superfície de um cilindro na menor distância?

Solução:

Em se tratando de uma superfície cilíndrica, onde um ponto é localizado em função do ângulo Υ, tem-se:

Do esquema paramétrico:

O comprimento de uma curva que liga dois pontos pertencentes à superfície de um cilindro é finalmente dado por:

Do funcional identifica-se o caso para a seguinte Condição de Otimização:

Substituindo, chega-se na seguinte equação diferencial:

A curva procurada pode ser encontrada ao se resolver a equação diferencial acima, pois sua solução será h(Υ), ou seja, o componente de localização **z**.

$$h = a\,\theta + b$$

Para a, b e R constantes e x e y obtidos por RcosΥ e RsenΥ tem-se que a curva que liga dois pontos da superfície é um arco de hélice cilíndrica:

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = h = a\theta + b$$

**Referências**

[1] RICIERI, A. P. *Cálculo Variacional: Cipós e Bolhas de Sabã o.* São José dos Campos P: Prandiano, 1993. 121p.

[2] BOYER, C.A. *História da Matemática* . São Paulo, Edgard Blücher, 2ª edição, 1996. 496p.

[3] BRECHTKEN-MANDERSCHEID, U. *Introduction to the Calculus of Variations.* Translated by P.G. Engstrom. New York: Chapman & Hall, 1991. 200p.